

Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka

JAKUB LÖWIT

ABSTRAKT. V přednášce představíme dvě jednoduchá a krásná tvrzení o trojúhelníku, která lze nezdířka uplatnit v olympiádních úlohách, která si procvičíme na mnoha příkladech. Posléze se pustíme do některých jejich hlubších důsledků.

Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka

Úmluva. (základní značení) Většinou budeme v $\triangle ABC$ značit O střed kružnice opsané, H orthocentrum, T těžiště, I střed kružnice vepsané. Středů stran BC , CA , AB označme M_A , M_B , M_C . Paty výšek z vrcholů A , B , C na strany BC , CA , AB budeme značit H_A , H_B , H_C . Středů úseček HA , HB , HC budeme značit M_{HA} , M_{HB} , M_{HC} . Střed Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ budeme značit N .

Úmluva. Pokud definujeme několik bodů analogickým způsobem, automaticky vše děláme „po řadě“, tedy jako první pojmenováváme střed první zmíněné úsečky atd.

Lemma. (Obrazy orthocentra) *Obrazy orthocentra H v osových souměrnostech podle stran AB , BC , CA a ve středových souměrnostech podle bodů M_A , M_B , M_C leží na kružnici opsané trojúhelníku $\triangle ABC$.*

S pomocí předchozího lemmatu a stejnolehlosti nyní odvodíme dvě klíčová tvrzení. Nenechme se ale mást – i pouhá znalost tohoto lemmatu nám v olympiádních příkladech může často velmi pomoci.

Tvrzení. (Feuerbachova kružnice, kružnice devíti bodů) *V $\triangle ABC$ leží devět bodů M_A , M_B , M_C , H_A , H_B , H_C , M_{HA} , M_{HB} , M_{HC} na jedné kružnici. Střed této kružnice N je středem úsečky OH a její poloměr je roven polovině poloměru kružnice opsané $\triangle ABC$.*

Tvrzení. (Eulerova přímka) *V $\triangle ABC$ leží body H , T , O v tomto pořadí na jedné přímce, a to v poměru $\frac{|HT|}{|OT|} = 2$.*

Cvičení. Dokažte předchozí dvě tvrzení. Pokud už nějaké důkazy znáte, dokažte je jinak.

Jak je vidět, Feuerbachova kružnice a Eulerova přímka spolu úzce souvisí, spojuje je právě dvojice stejnoolehlostí, které převádí kružnici opsanou na Feuerbachovu kružnici. Nyní už přichází čas na hromadu důsledků této elegantní dvojice tvrzení. V následujících příkladech najdeme jak zajímavé olympiádní problémy, tak pěkná tvrzení z geometrie trojúhelníka.

Body v převleku

Začneme příklady, na které vlastně ani tolik geometrie potřeba není - většinou stačí nahlédnout, že některé body vystupují v různých trojúhelnících různými způsoby. Často nám také pomůže stejnoolehlost, díky které nezřídka leží na jedné přímce víc bodů, než by se zprvu zdálo.

Příklad 1. Dokažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků $\triangle ABC$ a

$$(1) \triangle M_A M_B M_C$$

$$(2) \triangle M_{HA} M_{HB} M_{HC}$$

splývají.

Příklad 2. (Hamilton's Theorem) Mějme čtveřici trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$. Dokažte, že jejich Feuerbachovy kružnice splývají a jejich Eulerovy přímky prochází jedním bodem.

Příklad 3. Body dotyku kružnice vepsané $\triangle ABC$ se stranami BC , CA , AB označme D , E , F . Orthocentrum $\triangle DEF$ označme V . Pak body V , I , O leží na jedné přímce. (Írán 1995)

Příklad 4. Mějme $\triangle ABC$ s orthocentrem H . Uvažme opsiště trojúhelníků $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku tvořeného těmito opsišti má stejný poloměr jako kružnice opsaná původnímu trojúhelníku.

Příklad 5. Středů kružnic připsaných ke stranám BC , CA , AB $\triangle ABC$ označme J_A , J_B , J_C . Dokažte, že středy úseček $J_A J_B$, $J_B J_C$ a $J_A J_C$ leží na kružnici opsané $\triangle ABC$.

Příklad 6. V $\triangle ABC$ označme středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BCO$, $\triangle CAO$, $\triangle ABO$ jako O_A , O_B , O_C . Dokažte, že střed kružnice opsané $\triangle O_A O_B O_C$ leží na Eulerově přímce $\triangle ABC$.

Příklad 7. Mějme $\triangle ABC$ s vepsištěm I . Uvažme středy jeho stran M_A , M_B , M_C . Dokažte, že střed Feuerbachovy kružnice $\triangle BCI$ leží na ose úhlu $\sphericalangle M_B M_A M_C$.

Příklad 8. (Fuhrmann Triangle) Středů kratších oblouků BC , CA , AB kružnice opsané $\triangle ABC$ označme \check{S}_A , \check{S}_B , \check{S}_C . Jejich obrazy v osové souměrnosti podle úseček BC , CA , AB označme K , L , M . V $\triangle ABC$ označme I vepsiště a N střed Feuerbachovy kružnice. Ukažte, že přímka IN je Eulerovou přímkou $\triangle KLM$.

Angle chasing neboli úhlení

Pokud nás zrovna nenapadá nějaký trik, často je nejjednodušším přístupem dopočítat některé úhly. V geometrii (a v té olympiádě o to víc) je však typicky potřeba nejprve najít několik kružnic, které v úhlení pomohou. Často se někde v úloze nějaká Feuerbachova kružnice schovává a její odhalení a dokreslení nám výrazně usnadní práci – někdy dokonce skoro samo o sobě příklad vyřeší.

Příklad 9. Zkonstruuje $\triangle ABC$, máte-li dānu jeho kružnici opsanou, vrchol A na ní a jeho orthocentrum H .

Příklad 10. Uvažme všechny trojúhelníky s pevnou základnou a daným poloměrem kružnice opsané. Ukažte, že se jejich Feuerbachovy kružnice dotýkají pevné kružnice.

Příklad 11. V ostroúhlém různostranném $\triangle ABC$ označme P patu A -výšky, H kolmišře, O opsišře, D průsečík AO a BC a konečně M střed úsečky AD . Dokažte, že přímka PM prochāzí středem úsečky OH . (MO-60-A-III-5)

Příklad 12. Přímka p se dotýká Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ ve středu úsečky BC . Průsečíky p s přímkami AB , AC označme X , Y . Ukažte, že body B , X , C , Y leží na jedné kružnici.

Příklad 13. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsān do půlkružnice s průměrem AB . Tečny vedené k půlkružnici body C , D se protnou v bodě E a úhlopříčky AC , BD v bodě F . Označme M průsečík EF a AB . Dokažte, že body E , C , M , D leží na jedné kružnici. (China West 2010)

Příklad 14. Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník a H_1 , H_2 orthocentra trojúhelníků ABC , ABD . Dokažte, že $H_1H_2 \parallel CD$.

Příklad 15. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se středem I se dotýká jeho stran BC , CA , AB v bodech D , E , F . Buď Y , Z průsečíky přímek DF , DE s rovnoběžkou k BC vedenou bodem A . Středy úseček DY , DZ pojmenujme F' , E' . Dokažte, že body A , E , F , I , E' , F' leží na jedné kružnici. (American Mathematical Monthly)

Příklad 16. V $\triangle ABC$ s orthocentrem H a opsišřem O označme průsečík spojnice středů úseček BC , OH s osou úhlu u vrcholu A jako X . Dokažte $|\angle AXH| = 90^\circ$.

Příklad 17. Uvažme přímku p , která prochāzí středem úsečky BC a orthocentrem nerovnostranného $\triangle ABC$. Tato přímka protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ v bodech A' , A'' . Ukažte, že orthocentra $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, $\triangle A''BC$ tvoří vrcholy pravouhlého trojúhelníku.

Příklad 18. Mějme $\triangle ABC$ s Eulerovou přímkou l a zvolme dvě jeho strany CA , CB . Uvažme jeho střední příčku p prochāzející středy těchto dvou stran a spojnice q pat výšek spuštěných na tyto strany. Předpokládejme, že $p \cap q = C'$. Ukažte, že pak $CC' \perp l$. (Peru TST 2006)

Příklad 19. V $\triangle ABC$ se přímky AB , $H_A H_B$ protínají v X , přímky BC , $H_B H_C$ v Y a přímky CA , $H_C H_A$ v Z . Dokažte, že pak body X , Y , Z leží na jedné přímce, které je kolmá na Eulerovu přímku $\triangle ABC$.

Příklad 20. Ukažte, že Feuerbachovy kružnice trojice trojúhelníků, jež jsou určeny vždy opsíštěm, orthocentrem a jedním vrcholem daného trojúhelníku, mají dva společné body.

Příklad 21. Buď H orthocentrum $\triangle ABC$ s kružnicí opsanou ω . Bod P ležící na ω je různý od A , B , C . Průsečík přímek BH , AC označme E . Ať Q , R jsou body takové, že čtyřúhelníky $PAQB$, $PARC$ jsou rovnoběžníky v tomto pořadí vrcholů a přímky AQ , HR se protínají v X . Dokažte, že $EX \parallel AP$. (IMO Shortlist 1996)

Poměry mezi body

Často na nás úloha vybafne s nějakými poměry. Jejich správnou interpretací je mnohdy chytře zvolená stejnolehlost. Pokud jsou navíc takové body spjaté s Eulerovou přímkou, neváháme, a využijeme toho, co o ní známe.

Příklad 22. V $\triangle ABC$ ozančme D patu výšky na BC . Rovnoběžka s BC vedená bodem A podruhé protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ v E . Dokažte, že přímka DE prochází těžištěm $\triangle ABC$. (IMO shortlist 2011, upraveno)

Příklad 23. Dokažte, že orthocentrum a opsíště daného ostroúhlého $\triangle ABC$ mají stejnou vzdálenost od strany AB , právě když pro vnitřní úhly α , β při vrcholech A , B platí rovnost $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 3$. (MO–64–B–II–3)

Příklad 24. Je dán $\triangle ABC$ s opsíštěm O , orthocentrem H a poloměrem kružnice opsané R . Ukažte, že $|OH| < 3R$. (APMO 1994)

Příklad 25. Je dán $\triangle ABC$ s průměrem kružnice opsané XX' , těžištěm T a orthocentrem H . Ukažte, že přímka TX půlí úsečku HX' .

Příklad 26. ABC je trojúhelník s opsíštěm O a kolmištěm H různým od O . Ukažte, že obsah jednoho z trojúhelníků $\triangle AOH$, $\triangle BOH$, $\triangle COH$ je roven součtu obsahů zbylých dvou. (Asia-Pacific Mathematical Olympiad, 2004)

Isogonalita a Inverze

V mnoha úlohách na inverzi se Feuerbachova kružnice ráda objeví a my ji můžeme využít k dokončení úlohy. Neméně často nám ale inverze podkryje další zajímavé vlastnosti Feuerbachovy kružnice.

Že začneme příkladem, který už byl v předminulé kapitole, není náhoda.

Příklad 27. Body dotyku kružnice vepsané $\triangle ABC$ se stranami BC , CA , AB označme D , E , F . Orthocentrum $\triangle DEF$ označme V . Pak body V , I , O leží na jedné přímce. (Írán 1995)

Příklad 28. V ostroúhlém $\triangle ABC$ pojmenujme F obraz paty kolmice z B v osové souměrnosti podle střední příčky $M_B M_C$. Dokažte, že O leží na BF . (IGO 2015)

Příklad 29. Mějme nerovnostranný $\triangle ABC$, střed kružnice jemu vepsané označme I . Dokažte, že $IN \perp OH$ právě když je jeden z úhlů $\triangle ABC$ roven 60° .
(skoro folklór)

Příklad 30. Mějme $\triangle ABC$. Označme I střed jemu vepsané kružnice l . Dotyky kružnice l se stranami BC , CA , AB označme P , Q , R . Buď k kružnice opsaná středům stran trojúhelníku $\triangle PQR$. Buď $X \neq C$ průsečík přímky CI a kružnice opsané $\triangle ABC$, buď Y průsečík úsečky IX a kružnice k . Buď Z jeden z průsečíků kružnice l a kolmice k přímce CX vedené bodem Y . Dokažte, že přímka XZ se dotýká kružnice l . (PraSe)

Příklad 31. Na půlkružnici nad průměrem AB a se středem O zvolíme body C , D . Předpokládejme, že se polopřímky AB a DC protnou v bodě M . Označme K druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům AOD a BOC . Ukažte, že $|\sphericalangle MKO| = 90^\circ$. (Rusko 1995)

Příklad 32. (Feuerbach Theorem) Ukažte, že Feuerbachova kružnice $\triangle ABC$ se dotýká kružnice jemu vepsané i všech jeho kružnic připsaných.

Poznámka. Dotyk kružnice devíti bodů s kružnicí vepsanou nazýváme *Feuerbachův bod* $\triangle ABC$ a značíme jej F_e .

Příklad 33. (Kosnitha Theorem) V $\triangle ABC$ označme středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BCO$, $\triangle CAO$, $\triangle ABO$ jako O_A , O_B , O_C . Pak se přímky AO_A , BO_B , CO_C protínají v jednom bodě K_O (nebo jsou rovnoběžné).

Ponceletův bod

Na začátku přednášky jsme díky Hamilton's Theorem zjistili, že má smysl mluvit o Feuerbachově kružnici *orthocentrické* čtveřice bodů - tedy takové čtveřice bodů A , B , C , D , že každý z nich je orthocentrem zbylých tří. Co se takhle podívat na jinou, libovolnou čtveřici bodů?

Definice. *Orthocentrická* čtveřice bodů je čtveřice různých bodů v rovině taková, že každý z nich je orthocentrem trojúhelníka tvořeného zbylými třemi. *Neorthocentrická* čtveřice bodů je nečekaně taková čtveřice, která není orthocentrická.

Je dobré si uvědomit, že pokud je čtveřice bodů orthocentrická, je každý její bod orthocentrem trojúhelníka tvořeného zbylými třemi. Buď tedy je každý bod zvolené čtveřice orthocentrem zbylých tří (a jedná se o orthocentrickou čtveřici), nebo není žádný z nich orthocentrem zbylých tří (a jedná se o neorthocentrickou čtveřici).

Tvrzení. (Hamilton's Theorem) Mějme *orthocentrickou* čtveřici bodů A , B , C , D . Pak Feuerbachovy kružnice trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, $\triangle CAD$ splývají.

Tvrzení. (Poncelet Point) *Mějme neorthocentrickou čtveřici bodů takovou A, B, C, D . Pak se čtveřice Feuerbachových kružnic trojúhelníků $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle BCD, \triangle CAD$ protíná právě v jednom bodě P , který se nazývá Ponceletův bod čtyřúhelníku $ABCD$.*

Tvrzení. *Mějme neorthocentrickou čtveřici bodů $ABCD$. Dále orthocentrum $\triangle ABC$ nazvěme H . Pak Ponceletovy body neorthocentrických čtveřic $ABCD, ABDH, ACDH, BCDH$ splývají.*

Tvrzení. *Mějme neorthocentrickou čtveřici bodů $ABCD$ a jejich Ponceletův bod P . Označme paty výšek spuštěných z bodu A na přímkou CD, DB, BC jako A_B, A_C, A_D . Pak bod P leží na kružnici opsané $\triangle A_B A_C A_D$.*

Všimněme si, že analogické tvrzení platí také pro paty výšek z bodů B, C, D . Nalezli jsme tedy další čtyři kružnice procházející bodem P .

Tvrzení. (Tonda a Kenny) *Ponceletův bod neorthocentrické čtveřice $ABCD$ leží na kružnici opsané bodům $X = AB \cap CD, Y = BC \cap AD, Z = AC \cap BD$.*

Antigonal Conjugates

Využijme nyní nabytých vědomostí o Ponceletově bodě k tomu, abychom elegantně definovali antigonální dvojice bodů v trojúhelníku. Tyto *antigonal conjugates* přitom definujeme třemi na první pohled různými způsoby.

Define. (Define před Ponceletův bod) *Mějme $\triangle ABC$ a bod D různý od orthocentra, který navíc neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Obraz bodu D v osové souměrnosti podle Ponceletova bodu čtveřice $ABCD$ označme D' . Bod D' nazýváme *antigonal conjugate* bodu D vzhledem k $\triangle ABC$.*

Define. (Úhlová definice) *Antigonal conjugate bodu D vzhledem k $\triangle ABC$ (kde D je různý od H , neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$) je bod D' jednoznačně určený následující trojicí rovností orientovaných úhlů:*

$$(AD', D'B) = -(AD, DB),$$

$$(BD', D'C) = -(BD, DC),$$

$$(CD', D'A) = -(CD, DA).$$

Define. (Antigonalita, Isogonalita a Inverze) *Bod E' je obrazem bodu E v inverzi podle kružnice opsané $\triangle ABC$ (body E, E' nesplývají s opsištěm O). Dále Bod D je isogonal conjugate bodu E vzhledem k $\triangle ABC$ a bod D' je isogonal conjugate bodu E' vzhledem k $\triangle ABC$. Pak body D, D' jsou *antigonal conjugates*.*

Úmluva. *Pokud dále mluvíme o bodu D a jeho antigonal conjugate D' v $\triangle ABC$ s orthocentrem H , automaticky předpokládáme, že bod D (a tedy i D') je různý od A a neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$ tedy čtveřice $ABCD, ABCD'$ jsou neorthocentrické.*

Nyní následuje sprška cvičení, ve kterých jsou shrnuta důležitá (ale někdy i lehká) pozorování o Ponceletových bodech a antigonal conjugates. Ne všechna je ale nutné dělat popořadě, zejména k vyřešení prvního se hodí výsledky jiných.

Cvičení. Ukažte, že předešlé tři definice jsou vskutku ekvivalentní (a korektní).

Cvičení. Rozmyslete si, že (uvážením degenerovaných případů, které jsme v definici vynechali) „orthocentrum je antigonal conjugate kružnice opsané“.

Cvičení. Nahlédněte, že bod D' je antigonal conjugate bodu D právě když bod D je antigonal conjugate bodu D' (vzhledem k $\triangle ABC$).

Cvičení. Máme $\triangle ABC$, jeho orthocentrem H a bod D . Pak antigonal conjugates bodu D vzhledem k $\triangle ABC$, $\triangle ABH$, $\triangle BCH$, $\triangle CAH$ splývají.

Cvičení. V $\triangle ABC$ s orthocentrem H máme dvojici antigonal conjugates D , D' . Ukažte, že:

$$(AD', D'H) = -(AD, DH),$$

$$(BD', D'H) = -(BD, CH),$$

$$(CD', D'H) = -(CD, DH).$$

Cvičení. Body D , D' jsou antigonal conjugates v $\triangle ABC$. Pak Ponceletovy body čtveřic $ABCD$, $ABCD'$ splývají.

Cvičení. Mějme $\triangle ABC$ a libovolný bod D různý od jeho vrcholů a orthocentra. Obrazy bodu D v osových souměrnostech podle přímk BC , CA , AB označme D_A , D_B , D_C . Nahlédněte, že kružnice opsané $\triangle BCD_A$, $\triangle CAD_B$, $\triangle ABD_C$ prochází jedním bodem.

Cvičení. Mějme $\triangle ABC$ a libovolný bod D různý od jeho vrcholů a orthocentra. Obrazy bodu D v osových souměrnostech podle přímk BC , CA , AB označme D_A , D_B , D_C , středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BCD_A$, $\triangle CAD_B$, $\triangle ABD_C$, $\triangle D_A D_B D_C$ označme S_A , S_B , S_C , S_D . Ukažte, že obraz bodu S_D v inverzi podle kružnice opsané trojúhelníku $\triangle S_A S_B S_C$ je antigonal conjugate bodu D v $\triangle ABC$.

A co z toho?

Máme tedy docela hodně docela pěkných vlastností, které jsou docela dost obecné. Pojdme se ale podívat na nějaké příklady použití předchozí teorie. Přece jen už jsme se ale dostali dál než sahá běžná olympiádní matematika, příklady tedy nebudou ze soutěží - některé příklady dokonce budou poměrně nové věty z pokročilých partií geometrie trojúhelníka. Tak vzhůru na ně!

Příklad 34. Ukažte, že Feuerbachovy kružnice trojice trojúhelníků, jež jsou určeny vždy opsáním, orthocentrem a jedním vrcholem daného trojúhelníku, mají dva společné body.

Příklad 35. Mějme $\triangle ABC$ a jeho dva Fermatovy body X , X' (body zkonstruované přikreslením tří rovnostranných trojúhelníků z vnějšku resp. z vnitřku ke

stranám AB , BC , CA a uvažováním průsečíků jejich kružnic opsaných). Ukažte, že střed úsečky XX' leží na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Příklad 36. Kružnice opsaná průsečíkům os vnitřních úhlů daného trojúhelníku s jeho protějšími stranami prochází Feuerbachovým bodem tohoto trojúhelníku.

Příklad 37. Označme I vepsiště $\triangle ABC$ a F_e dotyk kružnice vepsané s Feuerbachovou kružnicí (Feuerbachův bod). Střed kružnic připsaných ke stranám AC , AB $\triangle ABC$ označme J_B , J_C . Obrazy těchto bodů v osových souměrnostech podle přímk AC , AB označme Y , Z . Průsečík přímk BY , CZ označme K . Ukažte, že F_e je středem úsečky KI .

Příklad 38. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme paty kolmic z D na AB , AC jako X , Y . Orthocentrum $\triangle ABC$ označme H . Pak přímk XY půlí úsečku HD .

Příklad 39. Uvažujme kružnici opsanou $\triangle ABC$ s průměrem PQ . Dále uvažujme Simpsonovy přímk P , Q vůči $\triangle ABC$. Ukažte, že jejich průsečík leží na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Příklad 40. Buď $\triangle ABC$, na jehož stranách AB , BC leží body P , Q tak, že čtyřúhelník $APQC$ je tětivový. Úsečky AQ , CP se protnou v X . Střed úseček AX , BX , CX označme K , L , M . Paty kolmic z X na AB , BC nazvěme S , T . Ukažte, že kružnice opsané $\triangle LSK$ a $\triangle LTM$ se protínají na úsečce AC .

Tak si pojďme hrát!

Jak už jsme zjistili, pro naši kružnici a přímk toho platí hodně. Doteď jsme platná tvrzení dělili do větších, logicky uspořádaných kapitol (ať už olympiádních, nebo souvisejících s pokročilejší geometrií trojúhelníka). V této poslední části je jednotící myšlenkou rozmanitost. Nebojte se příkladů, ale ani hintů – někdy je třeba použít poměrně netriviální tvrzení. Ještě než se pustíme do příkladů, přidáme jedno lemma, které je méně známé a v jistých situacích nám poskytne potřebný nadhled.

Lemma. (Anti-Steiner Point) *Mějme $\triangle ABC$ a libovolnou přímk p procházející jeho orthocentrem H . Pak se obrazy přímk p v osových souměrnostech podle přímk BC , CA , AB protínají na kružnici opsané $\triangle ABC$.*

Příklad 41. Mějme trojúhelník $\triangle ABC$ a jeho orthocentrum H . Tyto čtyři body určují šest přímk. Uvažujme množinu M všech kružnic, které se dotýkají nějaké trojice z určených přímk (takových, že všechny tři neprocházejí jedním bodem). Dokažte, že existuje kružnice, která se dotýká všech kružnic z M .

Příklad 42. Uvažujme ostroúhlý $\triangle ABC$, pro který platí $|AB| < |AC|$. Tečna procházející bodem A ke kružnici ω jemu opsané protíná přímk BC v bodě D . Nechť G je těžiště $\triangle ABC$ a nechť přímk AG protíná kružnici ω v bodě $H \neq A$. Předpokládejme, že přímk DG protíná přímk AB a AC po řadě v bodech E a F . Dokažte, že $|\sphericalangle EHG| = |\sphericalangle GHF|$. (CPS 2016)

Příklad 43. Uvnitř $\triangle ABC$ je dán bod S . Dokažte, že středy stran BC , CA , AB , středy úseček AS , BS , CS a průsečíky $AS \cap BC$, $BS \cap CA$, $CS \cap AB$ leží všechny na jedné elipse.

Příklad 44. Uvažme $\triangle ABC$ s patami výšek H_A , H_B , H_C . Dokažte, že Eulerovy přímky $\triangle AH_BH_C$, $\triangle BH_CH_A$, $\triangle CH_AH_B$ se protínají na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Příklad 45. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se středem I se dotýká jeho stran BC , CA , AB v bodech X , Y , Z . Obrazy těchto bodů v osových souměrnostech podle os AI , BI , CI označme X' , Y' , Z' . Středy stran BC , CA , AB pojmenujme M_A , M_B , M_C . Ukažte, že přímky $X'M_A$, $Y'M_B$, $Z'M_C$ procházejí jedním bodem.

Příklad 46. (First Fontené Theorem) Je dán $\triangle ABC$ se středy stran M_A , M_B , M_C . Zvolme libovolný bod P a paty výšek spuštěných z P na BC , CA , AB označme V_A , V_B , V_C . Označme $X = M_B M_C \cap V_B V_C$, $Y = M_C M_A \cap V_C V_A$, $Z = M_A M_B \cap V_A V_B$. Pak se přímky AX , BY , CZ protínají v jednom bodě R , který leží na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$ a na kružnici opsané $\triangle V_A V_B V_C$.

Příklad 47. (Second Fontené Theorem) Je dán $\triangle ABC$ a bod P , který se pohybuje po pevné přímce procházející opsištěm O . Pokud označíme paty výšek spuštěných z P na BC , CA , AB jako V_A , V_B , V_C , prochází kružnice opsaná $\triangle V_A V_B V_C$ pevným bodem R na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Příklad 48. (Third Fontené Theorem) Mějme body P a Q , které jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$ s opsištěm O . Pokud označíme paty výšek spuštěných z P na BC , CA , AB jako V_A , V_B , V_C , kružnice opsaná $\triangle V_A V_B V_C$ se dotýká Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ právě když body P , Q , O leží na jedné přímce.

Zde si dovoluji ukončit systém hintů, neboť hinty k následujícím problémům by byly nepřiměřeně dlouhé. Nechávám je tedy jako zdroj volné zábavy.

Příklad 49. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se dotýká jeho stran BC , CA , AB v bodech D , E , F . Buď D_B , D_C průsečíky přímek DF , DE s rovnoběžkou k BC vedenou bodem A . Analogicky definujeme E_C , E_A , F_A , F_B . Ukažte, že Eulerovy přímky $\triangle DD_B D_C$, $\triangle EE_C E_A$, $\triangle FF_A F_B$ procházejí Feuerbachovým bodem $\triangle ABC$.

Příklad 50. (Lester's Circle) Mějme různoustranný $\triangle ABC$. Ukažte, že jeho opsiště O , střed Feuerbachovy kružnice N a oba Fermatovy body X , X' leží na jedné kružnici.

Příklad 51. V $\triangle ABC$ označme O opsiště a I vepsiště. Dotyky kružnice vepsané se stranami BC , CA , AB označme D , E , F . Pak se obrazy přímky OI v osových souměrnostech podle DE , EF , FD protínají ve Feuerbachově bodě F_e původního trojúhelníka.

Příklad 52. Dotyky Feuerbachovy kružnice $\triangle ABC$ s jejími třemi kružnicemi připsanými (dotýkajícími se stran BC , CA , AB) označme F_a , F_b , F_c . Ukažte, že pak se přímky AF_a , BF_b , CF_c protínají v jednom bodě X . Pokud dále označíme v $\triangle ABC$

vepsiště I , střed Feuerbachovy kružnice N a její dotyk s kružnicí vepsanou F , leží body F, I, X, N na jedné přímce v harmonickém čtyřpoměru.

Příklad 53. Kružnice opsaná dotykům kružnic připsaných $\triangle ABC$ prochází Feuerbachovým bodem $\triangle ABC$.

Příklad 54. (Schiffler Point) Střed kružnice vepsané $\triangle ABC$ označme I . Dokažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků $\triangle ABI, \triangle BCI, \triangle CAI$ se protínají v jednom bodě S na Eulerově přímce $\triangle ABC$.

Příklad 55. (Exeter Point) Těžnice AT, BT, CT v $\triangle ABC$ protnou kružnici k jemu opsanou podruhé v bodech X, Y, Z . Tečny ke k vedené body B, C se protnou v bodě D , analogicky tečny vedené body C, A se protnou v E a tečny vedené body A, B se protnou v F . Ukažte, že přímky DX, EY, FZ se protínají na Eulerově přímce $\triangle ABC$.

Příklad 56. Střed strany BC, CA, AB daného trojúhelníka s opsištěm O a vepsištěm I označme M_A, M_B, M_C . Obrazy přímky OI v osových souměrnostech podle stran $\triangle M_A M_B M_C$ se pak protínají v jednom bodě (Feuerbachově bodě F_e).

Příklad 57. Označme F_e Feuerbachův bod $\triangle ABC$ a M_A, M_B, M_C středy jeho stran. Pak jedna ze vzdáleností $F_e M_A, F_e M_B, F_e M_C$ je součtem zbylých dvou.

Příklad 58. Střední příčka $\triangle ABC$ (s opsištěm O a vepsištěm I) rovnoběžná se stranou BC protíná osy vnitřních úhlů u vrcholů B, C v bodech A_b, A_c . Analogicky definujme body B_c, B_a, C_a, C_b . Ukažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků $AA_b A_c, BB_c B_a, CC_a C_b$ se protínají na Feuerbachově kružnici $\triangle ABC$.

Návody

1. Vždy najdete dvojici bodů, které leží na Eulerově přímce původního i jiného trojúhelníku. Je dobré se podívat třeba na různá opsiště, kolmiště a devítiště.
2. Na Feuerbachově kružnici původního trojúhelníka najdete vždy trojici bodů, kterou prochází i ta nová. Druhé vyplývá přímo z prvního, stačí se kouknout na střed všech těchto kružnic.
3. Uvědomte si, že ve vhodné stejnoolehlosti se body V, I zobrazí na I, O .
4. Uvažme opsiště všech tří trojúhelníků, které lze zkonstruovat díky stejnoolehlosti podle společného devítiště. Bod H je dokonce opsištěm vzniklého trojúhelníku, shodného s původním.
5. Kdo je tady Feuerbachovou kružnicí trojúhelníku $J_A J_B J_C$?
6. Vepište kružnici vzniklému trojúhelníku. Pokud stále nevíte, podívejte se o tři hinty výš.
7. Dokreslete obraz bodu A podle středu M_A . Podívejte se, kde se nachází opsiště a kolmiště trojúhelníku BCI , protože oba tyto body vystupují v nějakém trojúhelníku na obrázku jako velmi známé body.

8. Ukažte, že devítiště obou trojúhelníků splývají a bod I je orthocentrem Fuhrmanova trojúhelníka.
9. Co takhle zkonstruovat Feuerbachovu kružnici a podívat se, kde ji podruhé protne AH ?
10. Mají totiž pevný poloměr a jejich středy leží na jedné kružnici.
11. Zobrazte H na kružnici opsanou. „Feuerbachovská“ stejnolehlost dodělá zbytek.
12. Vyúhlete s použitím Feuerbachovy kružnice a úsekových úhlů.
13. Zamyslete se nad trojúhelníkem ABF . Jaké má orthocentrum? A kde má svou Feuerbachovu kružnici?
14. Dokreslete střed kružnice opsané a těžiště obou zmíněných trojúhelníků. Pokud dokreslíte ještě dvě vhodné těžnice, bude vymalováno.
15. No jaká kružnice to asi bude? S trochou nadhledu je to zjevné - Feuerbachova. Bude se hodit orthocentrum trojúhelníka DYZ .
16. Dokreslete střed úsečky AH a pohrajte si s příslušnou Thaletovou kružnicí.
17. Nejprve najděte pravoúhlý trojúhelník $AA'A''$ a pak si rozmyslete, že vlastně hledáme jen jeho posunutí.
18. Dokreslete druhý průsečík X přímky CC' s kružnicí opsanou a ukažte, že střed úsečky XC je patou hledané kolmice, přičemž použijte kružnice nad průměry CO , CH .
19. Dokreslete všechny tři Thaletovy kružnice nad stranami trojúhelníka a nahlédněte, že zmíněné tři body leží na chordále kružnice opsané a Feuerbachovy kružnice.
20. Jedním z bodů je triviálně střed úsečky OH . Prozradíme, že druhý leží na Feuerbachově kružnici původního trojúhelníka.
21. Uvažte orthocentra trojúhelníků ABC , PBC . Pomocí vhodného posunutí ukažte, že H je orthocentrem trojúhelníka AQR , takže $\sphericalangle HXA$ je pravý. Doúhlete.
22. Dokreslete A -těžnici a pomocí podobných trojúhelníků dopočtete poměr, ve kterém DE onu těžnici dělí.
23. Rozmyslete si, že Eulerova přímka je rovnoběžná se stranou, právě když orthocentrum leží ve třetině výšky. To ale říká daná rovnost.
24. Dokreslete Eulerovu přímku a těžiště. Dále si uvědomte, že $|OG| < R$.
25. Uvažte dvojici stejnolehlostí se středy T , H (nebo si uvědomte, že TO je těžnice trojúhelníka HXX').
26. Všechny tři trojúhelníky mají společnou základnu. Z vrcholů spusťte výšky na Eulerovu přímku. Dokreslete těžiště a spusťte navíc kolmici ze středu té správné strany. Dvě lehké stejnolehlosti už práci dokončí.
27. Kam se zobrazí kružnice opsaná v inverzi podle vepsané?
28. Je třeba úhlit přičemž můžeme použít isogonalitu O , H . Feuerbachova kružnice nám přitom může práci zpříjemnit.

29. Zbavte se bodu N a následně dokažte obě implikace s využitím skutečnosti, že body O , H jsou isogonal conjugates. Deltoidy jsou pěkné.
30. Invertujte podle kružnice l a zajímejte se zejména o zbylé dvě zadané kružnice.
31. Invertujte podle dané Thaletovy kružnice.
32. Invertujte podle Thaletovy kružnice nad úsečkou danou dotykem vepsané a připsané k jedné ze stran trojúhelníka.
33. Pomocí \sqrt{bc} inverze ukažte, že K_O je isogonal conjugate devítiště N .
34. Ano, tenhle příklad je tu už podruhé, ale teď je naprosto triviální.
35. A nejsou třeba čistou náhodou ty dva body antigonální přátelé?
36. Uvažte čtveřici sestávající z vrcholů trojúhelníka a jeho vepsíště. Kde je její Ponceletův bod?
37. Použijte předchozí hint. Dále pomocí vhodně dokreslených kružnic ukažte, že bod K je antigonální conjugate bodu I .
38. Ano, je to degenerované, ale je to tak! Popisovaný průsečík je Ponceletův bod P čtveřice $ABCD$ a Simpsonova přímka jednou z kružnic, která jím prochází (rovněž jím zjevně prochází Feuerbachova kružnice původního trojúhelníku). Bod H je „antigonální conjugate kružnice opsané“, přesněji H je obraz D podle P .
39. Použijte minulý hint. Dále obecně vyjádřete úhel svíraný dvěma Simpsonovými přímkami v závislosti na oblouku mezi dvěma body, které je generují.
40. Ukažte, že Ponceletův bod bodů A , B , C , D leží na úsečce AC když body $AD \cap CB$, $CD \cap AB$, A , C leží na jedné kružnici.
41. Zkombinujte Hamiltonovu a Feuerbachovu větu.
42. Použijte dvojici harmonických čtyřpoměrů a pak dokreslete Feuerbachovu kružnici.
43. Pomocí afinního zobrazení búno řekněte, že S je kolmiště.
44. Tyto přímky procházejí středy spojnic orthocentra s vrcholy původního trojúhelníku.
45. Ukažte, že se jedná o Feuerbachův bod F_e . Body X' , Y' , Z' zjevně leží na kružnici vepsané. Pak stačí uvážit stejnolehlost, která převádí Feuerbachovu kružnici na vepsanou.
46. Dokreslete druhý průsečík kružnic nad poloměry AO , AP (který je Miquelovým bodem nějakého čtyřúhelníku na obrázku) a navíc dokreslete průsečík přímky PV_A s druhou dokreslenou Thaletovou kružnicí. Nakonec najdete rovnoramenný lichoběžník jehož vrcholem je V_A , oba dokreslené body a hledaný průsečík. V něm se pak protínají obě původní kružnice.
47. Všimněte si, že se jedná o Anti-Steinerův bod naší pevné přímky vzhledem k trojúhelníku danému středními příčkami.

48. Použijte Second Fontené Theorem společně se Six Feet Theorem (paty výšek z bodů P , P' leží na jedné kružnici se středem ve středu úsečky PP'). Průsečíky našich dvou kružnic splývají právě když splývají Anti-Steinerovy body bodů P , P' .

Literatura a zdroje

Zejména bych chtěl poděkovat *Pepovi Tkadlecovi* [1] za pěkné příklady z mnoha jeho PraSečích přednášek. Dále jsem pro pokročilejší pasáž přednášky ve velké míře využil velmi přehledný příspěvek *Darije Grindberga* na AoPS [2], za což také velmi děkuji. Dále bych ještě rád zmínil *Forum Geometricorum* [3], ze kterého jsem použil obsah mnoha (těžších a skvěle napsaných) článků. V [4] jsem našel provázaný seznam mnoha tvrzení, z nichž jsem také některá použil. Jako podrobný výklad s mnoha lehkými až středně těžkými příklady doporučuji zdroje [5], [6], [7]. Dále ještě děkuji všem dalším orgům, novým i starým, z jejichž přednášek mi při tvorbě této něco pomohlo.

- [1] různé přednášky *Pepy Tkadlece*
- [2] Art of Problem Solving, <http://www.artofproblemsolving.com>
- [3] Forum Geometricorum, <http://forumgeom.fau.edu>
- [4] Wolfram MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com>
- [5] Nathan Altshiller Court: *College Geometry*
- [6] Michal Rolínek, Pepa Tkadlec: *107 Geometry Problems*
- [7] Roger A. Johnson: *Advanced Euclidian Geometry*
- [8] přednáška *Martiny Vaváčkové*
- [9] Česká MO <http://mo.webcentrum.muni.cz>
- [10] Dominik Teiml: *The Euler Line*
- [11] American Mathematical Monthly
<http://www.maa.org/press/periodicals/american-mathematical-monthly>