# Generující funkce

Jakub Löwit

Abstrakt. V přednášce se naučíme pracovat s takzvanými generující funkcemi, které tvoří pevný most mezi kombinatorikou a analýzou. Jejich znalost nám dá poměrně koncepční vhled do některých kombinatorických úloh. Získaná intuice se může hodit nečekaně často.

## Motivační okénko

Základní myšlenku generujících funkcí můžeme dobře ilustrovat na následujících cvičeních.

**Cvičení 1.** Jaký koeficient má polynom $(1 + x^5 + x^7)^{20}$ u členu $x^{17}$?

**Cvičení 2.** Máme tři košíky s vejci. V prvním jsou dvě žlutá, v druhém dvě modrá a ve třetím tři červená vejce. Kolika způsoby lze vybrat 4 vejce?

V prvním příkladě si místo „roznásobení“ závorek zjevně situaci chceme pouze kombinatoricky představit, zatímco druhý příklad lze přímočaře převést na násobení trojice polynomů a eliminovat tím možnost chyby. V tuto chvíli by samozřejmě kdokoli mohl říct, že jen slovíčkaříme a počítáme triviality. Korespondenci mezi kombinatorickými a analytickými úlohami lze ale dotáhnout mnohem dál, a v tu chvíli začne být překvapivě užitečná. Tak vzhůru na to!

## Hodí se vědět

Shrneme pár spíše jednoduchých věcí, které se bude hodit mít na paměti.

**Tvrzení.** *Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ platí $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.*

**Tvrzení.** *Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n = (x+1)^n$.*

Jediný nekonečný součet, který budeme do začátku potřebovat znát, je součet nekonečné geometrické řady.[1]

**Tvrzení.** *Pro všechna $x \in (-1, 1)$ platí $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

[1] Samozřejmě se hodit i další; my si ale užijeme dost zábavy i tak.

V případě $x = 0$ v předchozím tvrzení přitom používáme konvenci $0^0 = 1$. A když už jsme se dostali k těm nekonečným součtům, bylo by dobré vědět, co taková nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vlastně je. Na takovou řadu se lze dívat dvěma způsoby. Předně se na $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ můžeme dívat jenom jako na *formální řadu*, tj. posloupnost jejích koeficientů $a_0, a_1, a_2, \ldots$, za kterými jsou symboly $x^n$. Takovéto formální řady si můžeme sčítat i násobit jako by to byly polynomy. To odpovídá kombinatorické straně naší teorie.

Zároveň by se nám ale mohlo chtít za $x$ dosazovat. Pokud by to šlo, odpovídala by řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nějaké funkci $f(x)$, která číslu $x$ přiřadí onen nekonečný součet. O řadě bychom pak říkali, že *konverguje*. To ale bohužel nefunguje vždycky – pokud se koeficienty $a_i$ chovají nepěkně, takový součet vůbec nemusí dávat smysl.

**Tvrzení.** *Konverguje-li řada $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pro všechna $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ pro nějaké dostatečně malé $\varepsilon > 0$, pak jsou její koeficienty jednoznačně určeny hodnotami funkce $f(x)$.*

Koeficienty $a_n$ se pak dají zrekonstruovat pomocí derivování jako $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Protože nás ale zajímá spíš kombinatorická strana mince, konvergencemi se moc zabývat nebudeme. K tomu, aby řada konvergovala na nějakém $(-\varepsilon, \varepsilon)$ například bohatě stačí, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platilo $a_n < K^n$ pro nějaké pevné číslo $K$. Jakmile tedy koeficienty $a_n$ rostou dostatečně pomalu, jsou jednoznačně určeny funkcí $f(x)$. V takovém případě sčítání a násobení těchto funkcí odpovídá formálnímu sčítání a násobení původních řad.[2]

**Definice.**[3] Ať $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost reálných čísel. Její *generující* (často též *vytvořující*) funkcí rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

**Pointa** je následující. Máme-li nějakou posloupnost čísel, která nás zajímá, můžeme z ní vytvořit příslušnou generující funkci. Tu ale s trochou štěstí dokážeme vyjádřit v uzavřeném tvaru, třeba tak jako to umíme udělat pro nekonečné geometrické řady. Kombinatorické či algebraické vlastnosti původní posloupnosti jsou pak uschovány ve velmi kompaktním tvaru, ve kterém s nimi umíme jednoduše manipulovat – a pokud příslušné řady konvergují, umíme se kdykoli beztrestně vrátit zpět.

## Seznámení

**Cvičení 3.** Kolika způsoby lze číslo $n \in \mathbb{N}$ zapsat jako součet $k$ přirozených čísel, jestliže záleží na jejich pořadí?

[2] Pokud Tě řady zajímají, určitě se o nich dočteš v každé knížce o matematické analýze.

[3] Lze uvažovat i jiné druhy generujících funkcí, které se hodí k jiným účelům – my si ale vystačíme s těmito.

**Cvičení 4.** Jakou generující funkci má posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$, kde $a_n$ odpovídá počtu způsobů, jak zaplatit $n$ korun pomocí korunových, dvoukorunových a pětikorunových mincí? Umíte ji napsat v uzavřeném tvaru?

**Cvičení 5.** Mějme posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a $b_0, b_1, b_2, \ldots$ a jejich generující funkce $a(x)$, $b(x)$. Dokážete pomocí nich vyjádřit generující funkci posloupnosti, jejíž $i$-tý člen je $s_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0$?

**Cvičení 6.** Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ má generující funkci $g(x)$. Jakou generující funkci pak bude mít posloupnost částečných součtů $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$?

## Úložky

Začneme několika pěknými úlohami, které nevyužívají žádnou komplikovanou teorii – jenom trikovou práci s posloupnostmi a jejich generujícími funkcemi. Ačkoli se může hodit znát postupy z dalších částí přednášky, právě nyní bychom mohli pochopit, o co vlastně jde, a naučit se generující funkce intuitivně používat.

**Úloha 7.** Pro $n \in \mathbb{N}$ spočtěte $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2$.

**Úloha 8.** Máme pytel jablek, hrušek, pomerančů a banánů. Chceme vyrobit salát z $n$ kusů ovoce, aby

(1) počet jablek byl sudý,
(2) počet hrušek byl dělitelný pěti,
(3) byly v něm nejvýše 4 pomeranče,
(4) byl v něm nejvýše jeden banán.

Kolika způsoby to lze udělat?

**Úloha 9.** *Hrací kostka* je krychle, jejíž stěny jsou popsané nějakými přirozenými čísly. Navrhněte dvojici kostek, jejichž hození je ekvivalentní hodu dvojicí běžných kostek, tj. aby se všechny možné součty se objevovaly stejně často. A dokážete určit, kolik takových dvojic kostek existuje?

**Úloha 10.** Pro $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$ dokažte

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots,$$

kde napravo vystupuje nekonečný součin.

**Úloha 11.** Přirozená čísla jsme disjunktně prokryli $n$ aritmetickými posloupnostmi s diferencemi $r_1$,$r_2$, …, $r_n$. Dokažte, že $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = 1$.

**Úloha 12.** *Rozkladem* čísla $m \in \mathbb{N}$ rozumíme rozložení čísla $m$ na součet přirozených čísel, jejichž pořadí nás nezajímá. Dokažte, že počet rozkladů čísla $m$ na různá čísla je stejný jako počet rozkladů $m$ na lichá čísla.

**Úloha 13.** Po celých číslech skáče kobylka. Začíná v čísle 1 a pokaždé se náhodně rozhodne zda skočí na číslo o jedna menší či na číslo o dvě větší. S jakou pravděpodobností se někdy dostane do 0?

**Úloha 14.** Pro sudé $n \in \mathbb{N}$ dokažte rovnost

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n+2}{k} \binom{2(n-k)+1}{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

(VJIMC 2014)

**Úloha 15.** Je dáno rostoucí posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots$ v $\mathbb{N}_0$ taková, že každé $m \in \mathbb{N}_0$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako $a_i + 2a_j + 4a_k$. Určete $a_{1998}$.
(IMO Shortlist 1998)

**Úloha 16.** Najděte všechny disjunktní rozklady $\mathbb{N}_0 = A \cup B$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ má rovnice $x + y = n$, $x < y$ stejně řešení v $A \times A$ jako v $B \times B$.

**Úloha 17.** Existuje podmnožina přirozených čísel $X$ taková, že všechna dostatečně velká přirozená čísla lze vyjádřit jako součet dvou prvků z $X$ stejným počtem způsobů?

**Úloha 18.** Vrcholy pravidelného $n$-úhelníku jsou obarveny několika barvami. Vrcholy každé barvy navíc opět tvoří pravidelný mnohoúhelník. Dokažte, že dva z nich mají stejný počet vrcholů.

**Úloha 19.** Dokažte, že $\sum \binom{k}{n-k} = F_{n+1}$, kde na levé straně sčítáme přes všechna smysluplná $k$ a $F_i$ značí $i$-té Fibonacciho číslo.

## Derivace

Jedním ze šikovných způsobů, jak si ulehčit práci, je derivování a integrování. Jeli totiž řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergentní na nějakém neprázdném intervalu, jejím zderivováním dostaneme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$. Zintegrováním původní řady naopak získáme řadu $c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$ pro nějaké reálné $c$.

**Úloha 20.** Pro $n \in \mathbb{N}$ spočtěte hodnotu $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.

**Úloha 21.** Přirozená čísla jsme disjunktně prokryli $n$ aritmetickými posloupnostmi s diferencemi po řadě $r_1, r_2, \dots, r_n$ a počátečními členy po řadě $a_1, a_2, \dots, a_n$. Dokažte, že $\frac{a_1}{r_1} + \frac{a_n}{r_2} + \dots + \frac{a_n}{r_n} = \frac{n-1}{2}$.

Umět řady derivovat a integrovat se společně s dalšími postupy hodí docela často. Předchozí dvě úlohy tvořily jen lehkou ochutnávku – v dalších částech přednášky nabyté znalosti znovu využijeme.

## Rekurence

Pomocí generujících funkcí lze přímočaře řešit různé rekurence. Pro různé speciální druhy rekurencí existují přehlednější způsoby řešení, generující funkce lze ale použít dost obecně.

**Úloha 22.** Definujme $a_0 = 0$, $a_{i+1} = 2a_i + 1$ pro $i \geq 1$. Vyjádřete explicitně $a_n$.

S použitím stejného přístupu a trochy hrubé síly lze vyjádřit i členy jiných rekurentně zadaných posloupností. Často je přitom ale potřeba rozkládat všelijaké racionální funkce na parciální zlomky. Předveďme si to na několika příkladech. Ačkoliv je třeba trochu počítat, není se čeho bát.

**Úloha 23.** (Fibonacciho čísla) Ať $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Vyjádřete explicitně $F_n$.

Vytvořující funkce ale začnou být skutečně potřeba, jakmile rekurence přestanou být lineární. Samozřejmě pokud řešení umíme tipnout, typicky je triviální řešení dokončit indukcí. Takový tip ale vůbec nemusí být lehký – a generující funkce ho umí udělat samy.

**Úloha 24.** Spočtěte explicitně členy posloupnosti splňující $x_{n+2} - 6x_{n+1} - 9x_n = = 2^n + n$ pro $n \in \mathbb{N}_0$, přičemž $x_1 = x_0 = 0$.

Ponaučením z této části by tedy mělo být, že počítání členů mnoha rekurentních posloupností jde jednoduše převést do jazyka generujících funkcí, které pak řešíme jako „běžné rovnice“. Pokud nám přitom přeje štěstí a máme zkušenosti, z vyjádření generujících funkcí zvládneme zpětně vyčíst hledanou posloupnost. Až budeme mít více znalostí, vyřešíme si i pár zajímavějších rekurencí.

## Zobecněná binomická věta

**Definice 25.** Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ označme $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$. Nazýváme ho *zobecněné kombinační číslo*.

**Tvrzení 26.** *Pro $x \in (-1, 1)$ platí $(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots$*

Pro $r \in \mathbb{N}$ je tedy předchozí tvrzení běžná binomická věta. Pro $r \in \mathbb{Z}$ nebo obecněji $r \in \mathbb{Q}$ ale dostáváme nové rovnosti, ve kterých najednou napravo vystupují nekonečné řady. Kromě součtu nekonečné geometrické řady tedy explicitně známe další druh součtu, díky čemu se umíme mnohem lépe vypořádat s některými dalšími generujícími funkcemi.

Jakmile tedy při výpočtech dospějeme ke generujícím funkcím, kde se výrazy $(1+x)^r$ vyskytují ve jmenovatelích či dokonce v odmocninách, už z nich budeme umět explicitně vyjádřit členy příslušné posloupnosti. V mnoha případech se samozřejmě dá zobecněné binomické větě vyhnout, často ale podstatným způsobem pomůže.

**Úloha 27.** V košíku je 30 modrých, 40 červených a 50 bílých míčků. Kolika způsoby lze vybrat 70 míčků?

**Úloha 28.** Vyjádřete explicitně součet $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Pokud se nudíte, postup předchozí úlohy lze bez problému použít na zjištění součtů tvaru $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, nebo i jakékoli vyšší mocniny, kterou si předem vyberete.

**Úloha 29.** S jakou pravděpodobností padne při hodu 12-ti hracími kostkami přesně 30?

**Úloha 30.** Kolik existuje slov z písmen $a$, $b$, $c$, $d$ délky $n$, ve kterých se nikde vedle sebe nevyskytují písmena $a$, $b$?

**Úloha 31.** (Catalanova čísla) Máme čtverec $n \times n$ rozdělený na jednotkové čtverce. Ať $c_n$ značí počet cest z levého dolního do pravého horního rohu původního čtverce, které vedou po hranách menších čtverečků směrem doprava či nahoru a zůstávají celou dobu pod diagonálou (můžou se jí dotknout). Spočtěte $c_n$.

## Návody

**1.** Tento koeficient se dá kombinatoricky vyjádřit jako $\binom{20}{1} \cdot \binom{19}{2} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 9}{2} = 3420$.

**2.** Násobte $(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$, koeficient u $x^4$ je 8.

**3.** $\binom{n+k-1}{k-1}$

**4.** $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$

**5.** $a(x) \cdot b(x)$

**6.** $\frac{1}{(1-x)} \cdot g(x)$

**7.** Člen u $x^n$ v $(x+1)^n(x-1)^n$.

**8.** Jsou to koeficienty řady $\frac{1}{(1-x)^2}$, salát z $n$ kusů ovoce lze proto připravit $n+1$ způsoby.

**9.** Rozložte polynom $f = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, jak jen to jde. Součty po hodu dvěma kostkami pak odpovídají polynomu $f^2$.

**10.** Jednoznačné vyjádření čísel ve dvojkové soustavě.

**11.** Rozepište do rovnosti geometrických řad, vynásobte $(x-1)$ a dosaďte 1.

**12.** Nahlédněte, že počet rozkladů má generující funkci danou nekonečným součinem geometrických řad $\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$. Pomocí stejných metod převeďte úlohu na ověření nějaké rovnosti nekonečných součinů.

**13.** Označme $a_i$ počet posloupností skoků začínajících v 0, které se dostanou do 0 poprvé po $i$ skocích. Dále ať $b_i$ značí stejný počet pro posloupnosti začínající v čísle 3. Všimněte si vztahu mezi generujícími funkcemi.

**14.** Nejprve si všimněte rovnosti $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{m-1} x^j$. Interpretujte levou stranu zadání jako nějaký koeficient součinu dvou vhodných řad.

**15.** Uvažte funkci $\sum_{i=1}^{\infty} x^{a_i}$. Zkuste si hrát s dosazením $x = y^{2^k}$ a nekonečnými součiny.

**20.** Derivujte binomickou větu, dosaďte 1. Vyjde $n2^{n-1}$.

**21.** Zderivujte, dosaďte 1 a použijte identitu pro součet převrácených hodnot diferencí.

**22.** Vyjde $2^n - 1$.

**23.** Po delším výpočtu vyjde $(1+x+x^2)(x+x^2+x^3)(1+x)(1+x)$.

**28.** Vezměte geometrickou řadu. Derivujte, derivujte!

**31.** Nahlédněte rekurentní vztah $c_n = c_0c_{n-1}+\cdots+c_{n-1}c_0$, se kterým pak pracujte v řeči generujících funkcí.

## Literatura a zdroje

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu: *Problems from the Book*
[2] Pavel Šalom: *Vytvořující funkce*
[2] Robert Šámal: *Generující funkce*
[3] AoPS *Art of Problem Solving*