Vězni, domorodci a kouzelníci

Jakub Löwit

Abstrakt. Příspěvek sestává z hromady pěkných a často i notně trikových úloh na pomezí logiky a kombinatoriky, jejichž sjednocující myšlenkou je „kdo může co vědět“.

Budeme z různých úhlů zkoumat, co znamená „něco vědět“. Přesněji, bude nás zajímat, v čem všem může být skrytá šikovná informace – a to buď sama od sebe, nebo díky vychytralé domluvě.

Rozhovory

Začneme několika logickými úlohami, které jsou velmi dynamické. Rozmyslet si, co kdo ve kterou chvíli může vědět, totiž vůbec nemusí být triviální. Motto:

Tři logici přijdou do hospody.

„Dáte si všichni tři pivo?“

„Nevím…“

„Nevím…“

„Ano.“

Příklad 1. Albert a Bernard se snaží zjistit, kdy má Cheryl narozeniny. Už vědí, že je to některý z následujících deseti dnů: 15. květen, 16. květen, 19. květen, 17. červen, 18. červen, 14. červenec, 16. červenec, 14. srpen, 15. srpen, 17. srpen.

Když se všichni sešli, Cheryl pošeptala Albertovi, který měsíc je ten správný. Potom pošeptala Bernardovi správný den.

Cheryl:	*„Už víte?“*
Albert:	*„Ne, neví to ani jeden z nás!“*
Bernard:	*„Teď už to ale vím!“*
Albert:	*„Tak já teda taky.“*

Kdy má Cheryl narozeniny?

Příklad 2. V kruhu sedělo dvanáct bystrých mužů a každému z nich byla náhodně rozdána jedna z dvanácti karet – devíti prázdných a tří význačných označených jako J, Q a K. Každý z mužů se podíval na svou kartu a poté ji poslal sousedovi po pravé ruce. Takto se pokračovalo dále, přičemž po každém zhlédnutí karty byli všichni v jeden okamžik vyzváni, aby se přihlásili, pokud vědí, kdo právě drží kterou význačnou kartu. V prvních čtyřech kolech se nepřihlásil nikdo a po spatření páté karty zvedl ruku jeden člověk. Kolik lidí se přihlásilo po spatření šesté karty? A kolik po spatření sedmé? (Náboj)

Příklad 3. Mirek pověděl Kennymu a Pavlovi každému jedno přirozené číslo a dále jim sdělil, že jejich čísla jsou různá a jejich součtem je dvojciferné číslo. Pak se mezi Kennym a Pavlem odehrála následující konverzace:

Kenny:	*„Nedovedu určit, kdo z nás má větší číslo."*
Pavel:	*„Ani já to nedovedu určit, ale prozradím, že moje číslo je dělitelné* 17*."*
Kenny:	*„Aha, tak teď už umím jednoznačně určit, jaký je součet našich čísel."*

Určete součet jejich čísel. (Náboj)

Příklad 4. Anna má číslo a, Bill má číslo b, přičemž a, b jsou přirozená čísla lišící se o 1.

Anna:	*„Neznám tvé číslo."*
Bill:	*„Já taky ne."*
Anna:	*„Já už ano."*
Bill:	*„Já také."*

Najděte číslo, které některý z nich měl.

Příklad 5. Anna, Bill a Cath mají na čelech přilepené karty s přirozenými čísly. Přitom vědí, že součet dvou těchto čísel dává to třetí.

Anna:	*„Neznám své číslo."*
Bill:	*„Já taky ne."*
Cath:	*„Já taky ne."*
Anna:	*„Ha, moje číslo je* 50*."*

Jaká jsou ta zbylá dvě?

Příklad 6. Je známo, že a, b jsou přirozená čísla splňující $1 < a < b$, navíc $a + b \leq 100$. Pavel zná součin ab a Sára součet $a + b$.

Pavel:	*„Neznám ta původní čísla."*

Sára: *„Věděla jsem, že je neznáš.“*

Pavel: *„Už je znám.“*

Sára: *„Já už taky.“*

Příklad 7. Dostali jste se do finále televizní soutěže. Před sebou vidíte troje zavřené dveře. Za jedněmi je nové auto, za zbylými dvěma koza. Můžete ukázat na jedny dveře. Pak moderátor otevře jiné, za nimiž bude koza, a dá vám možnost vaši dřívější volbu dveří změnit. Vyplatí se to?[1] (Monty Hall)

Příklad 8. V jihoafrickém kmenu Bongo-bongo má každý domorodec na čele modrou nebo červenou tečku. Tisíciletá tradice praví, že kdykoli někdo zjistí barvu své tečky, musí si následující den vzít život. Jednou přijde do vesnice cizinec a na veřejném shromáždění sdělí všem svůj objev: „Někdo má na čele modrou tečku.“ Ukažte, že tím odstartuje vlnu sebevražd, která skončí smrtí úplně všech domorodců. (folklor)

Vězni

Vězňům vždy zadáme na první pohled skoro nemožný úkol. Oproti předchozím úlohám je tu ale jeden velký rozdíl: vychytralí vězni si předem mohou domluvit strategii. Mají šanci?

Příklad 9. Sto vězňů stojí v řadě. Každý má na hlavě černý nebo bílý klobouk a vidí všechny před sebou. Kat jde postupně odzadu a ptá se na barvu klobouku. Když řekne vězeň svou, přežije, jinak je popraven. Všichni slyší odpovědi všech ostatních i jejich osudy. Navrhněte taktiku, při které co nejpravděpodobněji přežije co nejvíce vězňů, pokud se na ní mohou domluvit předem. (folklor)

Příklad 10. Řešte předchozí příklad pro klobouky n barev.

Příklad 11. Deset vězňů sedí v kruhu, každý má na čele napsané číslo od 1 do 10 (ne nutně každý jiné). Každý vidí čísla všech ostatních. Na povel všichni současně vykřiknou číslo. Pokud někdo vykřikne to své, jsou všichni osvobozeni. Navrhněte taktiku, při které budou vězni jistě osvobozeni, pokud se mohou domluvit předem. (folklor)

Příklad 12. Ve vězení sedí 100 vězňů. Ředitel věznice se rozhodl, že jim dá šanci na svobodu. Do 100 očíslovaných šuplíků ve své obrovské kanceláři proto náhodně umístil jména vězňů, do každého šuplíku právě jedno. Vězni budou jeden po druhém chodit do kanceláře. Každý z nich se může postupně podívat do 50 šuplíků. Pokud se všem vězňům povede nalézt svá jména, jsou propuštěni, jinak je ředitel nechá popravit. Před začátkem hry se navíc mohou domluvit. Vymyslete pro vězně takovou strategii, aby jejich šance na propuštění byla alespoň $1-\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100}\right)>\frac{3}{10}$. (folklor)

[1] Auto je lepší než koza.

Příklad 13. V kruhu sedí n vězňů. Kouzelník si u každého hodí spravedlivou mincí a podle toho mu dá červený, nebo modrý klobouk. Každý vězeň vidí klobouky ostatních, ale ne ten svůj. Poté všichni najednou řeknou nějaká reálná čísla. Vyhrají právě tehdy, když bude součet jejich čísel kladný a červených klobouků bude sudý počet, nebo pokud bude součet jejich čísel záporný a červených klobouků bude lichý počet. Mohou si ovšem předem domluvit strategii. V závislosti na n nalezněte největší možné p, pro které existuje strategie taková, že vězni vyhrají s pravděpodobností p. (iKS–5–C7)

Příklad 14. V kruhu sedí $n \geq 3$ vězňů. Soudce si u každého vězně hodí spravedlivou mincí a podle toho mu dá buď modrý, nebo červený klobouk. Každý z vězňů pak soudci buď pošeptá „červený“, „modrý“, nebo „nevím“. Aby nebyli odsouzeni, musí se alespoň jeden vězeň trefit a žádný se nesmí splést. Navrhněte strategii, při které uspějí s maximální pravděpodobností.

Kouzelníci

Nyní se dostáváme k úlohám, ve kterých vystupují různí kouzelníci se svými promyšlenými triky.

Příklad 15. Kouzelník Arutyun a jeho asistent Amayak předvedou následující supertrik. V místnosti je ruleta. Diváci na ní vyznačí 2007 bodů a Amayak jeden z nich smaže. Potom se Arutyun vrátí do místnosti a uhodne půlkružnici, na které smazaný bod ležel. Jak mohou tento trik provést? (ARO 2007)

Příklad 16. Dva kouzelníci Adam a Bonifác byli uvězněni a žalářník Emil s nimi chce hrát ďábelskou hru. Na stole v cele je pevně postavena šachovnice $n \times n$. Emil odvede Bonifáce pryč a po svém návratu na každé políčko šachovnice položí minci, na jejíž vrchní straně je buď panna, nebo orel. Následně ukáže Adamovi své nejoblíbenější políčko a Adam pak musí otočit právě jednu minci. Poté je Bonifác přiveden zpět. Uhodne-li Bonifác Emilovo oblíbené políčko, budou oba kouzelníci propuštěni. Pro která n lze Emila přelstít? (ITAMO 2013)

Příklad 17. Arutyun a Amayak ukazují další zázračný trik. Diváci napíší na tabuli posloupnost n cifer $0, 1, \ldots, 9$ a Amayak dvě sousední zakryje černým diskem. Posléze Arutyun přijde a dvě zakryté číslice bezchybně uhodne včetně jejich pořadí. Pro které nejmenší n takový trik mohou předvádět? (ARO 2007)

Příklad 18. Jsou dána přirozená n a k splňující $n \geq k \geq 2$. Hrajeme hru proti zlému čaroději. Ten má $2n$ pexesových karet, tj. balíček obsahuje n dvojic stejných karet. Tyto karty čaroděj umístí do řady, čímž hra začíná. V každém tahu můžeme otočit k karet. Pokud mezi nimi jsou dvě stejné, okamžitě vyhráváme. V opačném případě je čaroděj podle své nálady nějak zamíchá a umístí zpět do řady. Pro které hodnoty k umíme určitě v konečném počtu tahů vyhrát? (USAMO 2016)

Příklad 19. Kenny s Pepou se domluvili, že večer při ohni předvedou trik. Pepa nechal Olina vybrat pět písní ze zpěvníku se 124 písněmi. Sám pak z těchto pěti písní vybral čtyři a určil, v jakém pořadí se budou hrát. Na to zavolali Kennyho a ony čtyři písně mu v daném pořadí zazpívali. Jakmile dozpívali, Kenny ihned začal zpívat zbývající pátou. Jak to Pepa s Kennym mohli udělat? (PraSe-30-1-8)

Kódy

Plynule pokračujme v řešení dalších problémů, ve kterých je také potřeba najít nějaké chytré kódování.

Příklad 20. Na obvodu rulety jsou na n pozicích napsané cifry 0 a 1. Většina kola je však skrytá, vidět je jen k následujících pozic. Cifry jsou ale na kole napsané tak chytře, že z těchto k cifer vždy umíme poznat, jak je ruleta natočená. V závislosti na k nalezněte maximální n, pro které je to možné.

Příklad 21. Dva dobří přátelé si píší zprávy sestávající vždy přesně z k písmen n-písmenné abecedy. Aby se nemohlo djít k žádnému nedorozumění, musí se každá dvě používaná slova lišit alespoň na dvou pozicích. Ukažte, že mohou používat k^{n-1} různých slov. (KMS 05/06 Z3 12)

Příklad 22. Medvěd měl sen o polynomu p s nezápornými celými koeficienty. Kdykoli Liška řekne číslo z, Medvěd jí prozradí hodnotu $p(z)$. Kolik nejméně otázek Liška potřebuje k tomu, aby určila Medvědův polynom? (PraSe-36-4-6)

Příklad 23. Dva ruští a jeden americký špion se potkali v Moskvě u partičky karet. Mají sedm různých karet, každý Rus si lízne tři a na Američana zbude jen jedna. Rusové by rádi ještě před začátkem partie zjistili, kdo drží které karty. To chtějí provést tak, aby si Američan stále nebyl jistý vlastníkem žádné další karty. Může mít ruská rozvědka takový protokol, který jim to umožní bez ohledu na to, zda jej Američan zná? (Moskva 2000)

Nekonečná jízda

Zkusme nakonec řešit další hádanky s vězni, ve kterých však bude vystupovat nějaké to nekonečno[2].

Příklad 24. Ve vězení sedí 100 vězňů, čas od času vezme bachař některého z nich na výslech. Ve výslechové místnosti je jen jedna žárovka s vypínačem, který vězni mohou přepínat. Kterýkoli vězeň může při výslechu prohlásit: „Už jsme byli všichni vyslechnuti, takže nás nemáte důvod dál zadržovat!“ Je-li to pravda, budou všichni propuštěni, v opačném případě ihned popraveni. Bachař si přitom musí výslechy předem naplánovat tak, aby každého vězně potenciálně vyslýchal nekonečněkrát. Mohou se vězni bezpečně dostat na svobodu?

Příklad 25. Řešte předchozí úlohu s následující obtíží: Předem je dáno přirozené k a bachař smí až k-krát změnit stav žárovky.

[2] Kdykoli to hraje roli, věříme v *axiom výběru*.

Předchozí příklad má velmi zajímavá zobecnění, která vězňům umožňují skoro libovolnou komunikaci. My se však raději pustíme do dalších příkladů jiného rázu.

Příklad 26. Za sebou sedí prasátka postupně očíslovaná přirozenými čísly, přičemž každé vidí všechny před sebou. Každé má na hlavě klobouk v nějakém odstínu šedé[3]. Naráz všechna musí vykřiknout barvu svého klobouku. Existuje taková strategie, aby se spletlo pouze konečně mnoho z nich? (folklor)

Příklad 27. Král má ve sklepení svého hradu za každé přirozené číslo právě jednu truhlu s hromadou zlata nějaké reálné hmotnosti. Jednoho dne zadal svým 100 komorníkům nelehký úkol. Komorníci budou po jednom chodit do sklepa. Každý komorník se pak může podívat do libovolně mnoha truhlic, ale ne do všech. Při výstupu ze sklepa pak musí oznámit číslo nějaké truhly, kterou neotevřel, a váhu zlata v ní. Pokud se splete nejvýše jeden komorník, budou všichni bohatě odměněni. Můžou se komorníci předem domluvit tak, aby to zvládli?

Příklad 28. V řadě stojí vězni, kteří jsou postupně označeni přirozenými čísly, přičemž každý vidí právě vězně s vyššími čísly. Každý vězeň má na zádech svého oblečení $k = 0, 1, \ldots, n$ černých proužků. Dozorce postupně prochází kolem a ptá se vězňů na počet jejich proužků. Každý z vězňů přitom slyší odpovědi svých předchůdců. Kdo odpoví správně, je propuštěn. Zachraňte jich co nejvíc!

Příklad 29. Štěpán poslal Filipovi a Radovi dva provázky spolu s informací, jak jsou dlouhé. Poté se odehrála následující mailová konverzace:

Štěpán: *„Poslal jsem vám dva různě dlouhé provázky, jejichž délka v centimetrech je*

$$a - \frac{1}{3^b} - \frac{1}{3^{b+c+1}},$$

kde a, b, c jsou přirozená čísla."

Filip: *„To je zajímavé. Ale neumím říct, který z nich je delší."*

Rado: *„Já taky ne."*

Filip: *„Já taky ne."*

Rado: *„Já taky ne."*

Štěpán: *„Je jedno, kolikrát si tohle řeknete, stejně nebudete vědět, čí je delší."*

Filip: *„To je fakt zajímavá informace. Ale pořád nevím, kdo má větší délku."*

Rado: *„Já taky ne."*

Filip: *„Já taky ne."*

Štěpán: *„Opět, je jedno, kolikrát si tohle řeknete, stejně nebudete vědět, který z provázků je delší."*

Filip: *„Ha. No, furt nevím, kdo má ten delší."*

Rado: *„Já taky ne."*

[3] Každý takový odstín odpovídá nějakému reálnému číslu z intervalu od 0 do 1.

Filip: *„Já taky ne."*

Rado: *„Já taky ne."*

Štěpán: *„Ve skutečnosti, je jedno, kolikrát uděláme tento malý rozhovůrek, kde budete cik-cak tvrdit, že nevíte, kdo má delší provázek, a já vám řeknu, že je jedno, kolikrát si to řeknete a že to stejně nezjistíte, protože to ani z tohoto prohlášení nezjistíte. Navíc, pokud bych zopakoval předchozí větu ještě jednou, byla by stále pravdivá. A to dokonce i kdybych ji zopakoval ne jednou, ale i dvakrát, třikrát, ba i tisíckrát."*

Filip: *„To je fakt super informace. Ale pořád neumím říct, který z nich je delší."*

Rado: *„Já taky ne."*

Filip: *„Já taky ne."*

Štěpán: *„Jo, pořád je jedno, kolikrát si teď navzájem řeknete, že to furt nevíte, pořád to nebudete vědět. A i když vám teď tuhle větu řeknu dvatisícesedmnáctkrát, pořád to vědět nebudete."*

Filip: *„Zajímavé. Ale pořád nevím, kdo má větší kus."*

Rado: *„Já taky ne."*

Filip: *„Já taky ne."*

Rado: *„Já taky ne."*

Filip: *„Ahá! Tak už vím, čí provázek je delší!"*

Jak dlouhý byl Filipův provázek? (iKS-7-C5)

Návody

1. Rozebírejte.

2. Po prvním zvednutí ruky ostatní okamžitě vědí, že tento člověk držel jako první a jako pátou význačné karty.

3. První dvě věty jim dávají pouze čísla 17 a 34, díky třetí větě jsou různá, součet je tedy 51.

4. První otázka zakazuje 1 pro Annu, druhá $1, 2$ pro Billa. Potom ale musel mít jeden z nich 3.

5. Řešení je $(a, b, c) = (50, 20, 30)$.

6. Vyjde 4 a 13, ale dá to hodně rozebírací práce.

7. Jen koza by nezměnila pravděpodobnost výhry z $\frac{1}{3}$ na $\frac{1}{2}$…

8. Indukce dle počtu modrých teček.

9. Parita, splést se může jen první.

10. Počítání modulo n, splést se může jen první.

11. Každý si zabere jeden součet modulo 10.

12. Vězni si mohou označit šuplíky svými jmény a podle nich je procházet.

13. Nalezněte strategii, která se rozbije pouze tehdy, když jsou všechny klobouky červené.

14. Představte si n-dimenzionální krychli. Vymyslete strategii, která buď funguje, nebo se spletou všichni.

15. Orientujte si kružnici a soustřeďte se na nejdelší oblouk.

16. Jde to pouze pro $n = 2^k$. Adam a Bonifác si čtverečky označí čísly ve dvojkové soustavě a chytře využijí jejich XOR. Pro jiná n kódování nevyjde kvůli dělitelnosti.

17. Díky nutnosti jednoznačného kódování odhadněte $n \geq 101$. Pro 101 si hrajte se součtem sudých a součtem lichých pozic modulo 10.

18. V jednom případě si vyrobte karty, které znáte. V druhém případě to zvolte tak, aby to nevyšlo.

19. Je třeba z každé pětice písní odebrat jednu tak, abychom každou čtveřici dostali 24krát. Z každé pětice seřazených písní odeberte tolikátou, jaký dává jejich součet zbytek modulo 5.

20. Uvažte orientovaný graf, jehož vrcholy jsou $(k-1)$-tice nul a jedniček a hrany odpovídají jejich překrývání na $(k-2)$ následujících pozicích. Všimněte si, že vyrobený graf je eulerovský.

21. Vyberte ta slova, jejichž součet písmen je stejný modulo k.

22. Dvě otázky stačí – nejdřív se zeptáme na $p(1)$ a posléze na hodnotu v tak obrovském čísle k, abychom měli k dispozici jednoznačný zápis v soustavě o základu k.

23. Vyzradí součet své ruky modulo 7, což stále neurčuje pozici žádné z karet.

24. Vězni si mezi sebou zvolí počtáře, kterému předají zprávu o svém výslechu rozsvícením zhasnuté žárovky.

25. Každý vězeň pošle $2k+1$ rozsvícení počtáři, který nahlásí úspěch po $100(2k+1)-k$ spočtených žárovkách.

26. Z každé skupinky posloupností, které se od nějakého indexu shodují, se prasátka (vybavená axiomem výběru) domluví na jednom reprezentantovi.

27. Vyřešte si to nejdřív pro dva.

28. Každé posloupnosti přiřaďte nějaký zbytek modulo $n+1$ tak, aby se posloupnosti s konečným počtem rozdílů lišily právě o součet těchto rozdílů.

29. Délka provázků odpovídá lexikografickému uspořádání čísel a, b, c. Choďte ve třírozměrné krychličkové mřížce se souřadnicemi odpovídajícím (a, b, c).