Kombinatorická geomerie

Kuba Löwit

Abstrakt. Úlohy z kombinatorické geometrie se objevují napříč olympiádní i vysokoškolskou matematikou. Mohou být hravé, zajímavé, těžké i poučné. Jejich krása a prokletí tkví v tom, že v geometrickém zadání často dostáváme víc informací, než potřebujeme (a než chceme). Na nás samotných pak zůstává břemeno určit, co je v úloze ve skutečnosti důležité, a toto prozření využít k jejímu zdárnému vyřešení.

„Mathematics is the art of forgetting.“

Tipy

Řešení úloh z kombinatorické geometrie je zábavné, ale může být i dost těžké. Celá úloha totiž mnohdy stojí pouze na povšimnutí si, co je v ní důležité.

V celé přednášce si vystačíme „jenom“ s kombinatorickou geometrií v rovině – zábavná je na to dost. A ve všemožných soutěžích se typicky vyskytují hlavně rovinné úlohy. Například nejtěžší úlohy na IMO bývají nezřídka právě kombinatorické geometrie.

Na olympiádní úlohy z kombinatorické geometrie neexistují žádné všespásné postupy. Proto i my budeme trénovat jejich řešení téměř bez jakékoli teorie. Přece jen se ale hodí zformulovat pár myšlenek, které mohou pomoct.

- *spojitost*
  V mnoha případech je intuitivní něčím začít spojitě hýbat – např. posouvat, otáčet či nafukovat. Pouze je potřeba dávat pozor, aby naše argumenty opravdu byly pravdivé a přehledné. Speciálně se může hodit takzvaná *diskrétní spojitost*: umíme-li s něčím hýbat, aby se celočíselný výsledek měnil vždy pouze o ± 1, a umíme-li dosáhnout nějakých hodnot m, n, umíme dosáhnout i libovolné hodnoty mezi nimi.
- *extremální princip*
  Občas je prostě potřeba odněkud začít – tak proč třeba nezačít od toho nejmenšího? Nebo největšího? Zprava? Zleva? Zeshora? Nebo odjinud? Přijít na dobrý začátek je občas většina řešení.
- *invarianty*
  Když má člověk dokázat, že něco nenastane, je šikovné najít inariant či monovariant, který to zakáže.
- *chytré počítání*
  Čas od času je nutné na obrázku něco spočítat. Pointou ale bývá spočítat to chytře. Různé triky připomínající počítání dvěma způsoby často ušetří dost práce.

- *konvexní obaly*
  Má-li člověk divnou množinu bodů v rovině, uvážení konvexního obalu může situaci výrazně zpřehlednit.
- *triangulace*
  Každý mnohoúhelník lze rozřezat na trojúhelníky. To někdy opět pomůže při práci s body uvnitř. (Pokud zrovna nemáš co dělat, důkladně si rozmysli, že i nekonvexní mnohoúhelníky skutečně nějakou triangulaci mají.)
- *obarvování*
  Udělat si v úloze pořádek šikovným obarvením je často všechno, co je potřeba.
- *Dirichletův princip*
  Používá se tak, jak by člověk čekal – jakmile mámě několik bodů v uzavřené oblasti, z Dirichletova principu jsou některé z nich blízko.
- *algoritmizace*
  Nejjednoduší způsob, jak sepsat řešení, někdy může být nalezení jednoduchého algoritmu, který úlohu řeší.
- *pravděpodobnost*
  Konečná pravděpodobnost je jen kombinatorika v plesových šatech. Triková práce s pravděpodobností může zpřehledit nejedn úvahu.
- *indukce*
  Ta se hodí vždycky. Občas ji ale můžeme provádět i podle netradičních paramatrů. Zároveň se někdy hodí induktivně dokazovat silnější tvrzení, než jaké nás zajímá.

  ... a cokoli dalšího.

Folklor

Pro začátek si dáme pár provařených úložek, které mají celkem pěkná řešení. Pokud ale řešení některé z nic neznáte, vymyslet ho může chvíli trvat...

Úloha 1. Rozdělte čtverec na 13 shodných částí.

Úloha 2. Na opačných stranách úsečky délky d jsou mraveniště s m a n mravenci. Ti vybíhají proti sobě ve vteřinových intervalech. Když se dva mravenci srazí, oba se otočí a běží zpět. Když některý přeběhne kraj úsečky, spadne na zem. Za jak dlouho všichni mravenci popadají?

Úloha 3. Z tabulky $2^n \times 2^n$ někdo ukradl jedno políčko. Dokažte, že zbytek tabulky umíme pokrýt pomocí rohových triomin ze třech čtverečků.

Úloha 4. V rovině je několik bodů, které neleží na jedné přímce. Ukažte, že existuje kružnice procházející alespoň třemi z nich, která ve svém vnitřku neobahuje žádný další.

Úloha 5. Uvnitř $2n$ úhelníka sedí liška. Ze všech vrcholů po ní najednou vystřelíme. Žádná střela nezasáhla vrchol. Dokažte, že některá strana byla zasažena dvakrát.

Úloha 6. Na kružnici jsme náhodně vyznačili n bodů. Jaká je šance, že všechny leží na jedné půlkružnici?

Úloha 7. Po kruhovém rybníčku plave kachnička. Na obvodu číhá liška, která je čtyřikrát rychlejší, ale bojí se do vody. Kachnička umí vzlétnout a uletět jen ze souše. Podaří se jí mlsné lišce uniknout?

Úloha 8. Je možné rozdělit čtverec na několik ostroúhlých trojúhelníků?

Úloha 9. Rozřezali jsme obdélník na menší obdélníky a shledáváme, že každý má alespoň jednu stranu celočíselnou. Dokažte, že i původní obdélník měl alespoň jednu stranu celočíselnou.

Úloha 10. Je dána konvexní množina M v rovině, jejíž kolmý průmět na libovolnou přímku je úsečka délky 1. Musí být M jednotkový kruh?

Úloha 11. Kruhovou studnu s průměrem 1 metr chceme zakrýt dřevěnými prkny širokými 10 centimetrů. Kolik jich je nejméně potřeba?

Přímočařejší úložky

Úloha 12. Na kluzišti trénuje hokejista. Má tři puky, které leží ve vrcholech nedegenerovaného trojúhelníku. Pokaždé si jeden vybere a odpálí ho tak, aby proletěl mezi zbylými dvěma. Může je 2019-tým odpalem vrátit do původní polohy?

Úloha 13. Čtvercový dort s rozměry 6×6 je pokrytý kousky čokolády 2×1. Dokažte, že ho vždy můžeme rozkrojit, aniž bychom krájeli kousek čokolády.

Úloha 14. Body roviny jsou obarveny dvěma barvami. Najděte rovnostranný trojúhelník se stejně barevnými vrcholy.

Úloha 15. V rovině leží několik mnohoúhelníků tak, že se každé dva protínají. Najděte přímku, která je protíná všechny.

Úloha 16. Martin k narozeninám dostal kruhový dort a hned se rozhodl polovinu z něj darovat Zuzce. Než ji ale stihl odkrojit, Pepa už dort nakrájel tradičním způsobem na právě $4k$ dílků – $2k$ z nich bylo větších (navzájem stejných) a $2k$ menších (též navzájem stejných). Dokažte, že Martin i tak našel několik sousedních dílků, které tvořily půlkruh. (MKS 33-5-5)

Úloha 17. V rovině je konečná množina bodů S taková, že každý trojúhelník s vrcholy v S má obsah nejvýše 1. Dokažte, že celá S se dá schovat do trojúhelníku o obsahu 4. (Putnam 2016)

Úloha 18. Uvnitř konvexního mnohoúhelníku M je dán bod O. Dokažte, že kolmá projekce bodu O na některou stranu M leží uvnitř této strany.

Úloha 19. Dostali jste hromadu čtverečků s celkovým obsahem 1. Naskládejte je do čtverce s obsahem 2 tak, aby se nepřekrývaly.

Úloha 20. V rovině je dán bod A a několik mnohoúhelníků, přičemž každé dva z nich se protínají. Dokažte, že existuje kružnice se středem v A, která je protíná všechny.

Úloha 21. V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů v obecné poloze. Uvažujme vnitřní úhly trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech, velikost toho nejmenšího označme ϕ. Pro dané n najděte největší možné ϕ. (MO 64-A-II)

Úloha 22. Máme dvě kružnice s obvodem 1000. Na jedné je vyznačeno 1000 bodů, na druhé několik oblouků s celkovým součtem délek nejvýše 1. Dokažte, že na sebe umíme kružnice položit tak, aby všechny vyznačené body ležely mimo vnitřky vyznačených oblouků.

Úloha 23. Pejsek rozkousal pravidelných $4n$-úhelník na konečně mnoho rovnoběžníků. Dokažte, že některý z nich je ve skutečnosti obdélník. (Brkos XXI-6-4)

Zajímavější úložky

Úloha 24. V rovině leží body O, A_1, A_2, ..., A_{2018} tak, že žádné tři z nich neleží na společné přímce. Ukažte, že počet trojúhelníků $A_iA_jA_k$, které obsahují bod O, je sudý.

Úloha 25. Konečně mnoho bodů roviny je obarveno žlutě. Každé tři žluté body lze navíc zakrýt páskem šířky 1. Dokažte, že lze všechny žluté body zakrýt páskem šířky 2.

Úloha 26. V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů. Zabodněte do roviny $2n - 5$ špendlíků tak, aby propíchly vniřek každého trojúhelníku s vrcholy v daných bodech.

Úloha 27. V obdélníku R je dáno n růžových bodů tak, že spojnice žádných dvou z nich není rovnoběžná s žádnou stranou R. Rádi bychom rozřezali R na obdélníčky se stranami rovnoběžnými se stranami R tak, aby žádný z nich neobsahoval růžový bod ve svém nitřku. Kolik nejméně jich musí být? (IMO Shortlist 2014)

Úloha 28. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazveme *kolumbijským*, jestliže je 2013 z nich červených, 2014 modrých a žádné tři neleží v přímce. Skupina přímek pro takové rozmístění je *dobrá*, pokud neprochází žádným bodem rozmístění a žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev. Najděte nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění existuje skupina k dobrých přímek. (IMO 2013-2)

Úloha 29. Ať S je konečná množina bodů v rovině v obecné poloze. Pro každý konvexní mnohoúhelník P s vrcholy v S označme $a(P)$ počet jeho vrcholů a $b(P)$ počet bodů z S ležících mimo P. Úsečky, body i prázdnou množinu považujeme za konvexní mnohoúhelníky. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dokažte

$$\sum_P x^{a(P)}(1-x)^{b(P)} = 1,$$

kde sčítáme přes všechny konvexní mnohoúhelníky P s vrcholy v S.

(IMO Shortlist 2006)

Úloha 30. Nechť n je přirozené číslo. V rovině se pase n bodových kraviček a n bodových oveček. Žádná tři zvířátka neleží na jedné přímce. Balanční přímkou nazveme přímku procházející jednou ovečkou a jednou kravičkou tak, že na každé straně od přímky je stejně oveček jako kraviček. Ukažte, že existují alespoň dvě balanční přímky. (USAMO 2005)

Úloha 31. Obdélník R s lichými celočíselnými délkami stran je rozřezán na menší obdélníky s celočíselnými délkami stran. Dokažte,že existuje malý obdélník, jehož vzdálenosti od všech čtyř stran toho velkého mají stejnou paritu.

(IMO Shortlist 2017)

Úloha 32. V zátoce je 18 majáků, každý dokáže osvítit úhel $20°$. Dokažte, že je lze natočit tak, aby osvítily celou zátoku.

Úloha 33. V rovině je 2017 přímek tak, že žádé tři z nich neprochází jedním bodem. Šnek Turbo sedí v nějakém bodě na právě jedné z nich a začne se po nich plazit následujícím způsobem: pohybuje se daným směrem po jedné přímce dokud nenarazí na první průsečík; v něm zahne po druhé přímce doprava či doleva, přičemž výběr toho směru střídá střídá. Může se stát, že Turbo projede nějakou úsečku postupně v obou směrech? (EGMO 2017-3)

Úloha 34. V rovině leží $n \geq 2$ úseček tak, že se každé dvě protínají a žádné tři neprochází stejným bodem. Pepa si vybere jeden konec každé úsečky a posadí do něj žábu čelem ke druhému konci. Pak $n-1$ krát tleskne. Při každém tlesknutí žáby skočí do následujících průsečíků na svých úsečkách. Pepa by chtěl žáby rozmístit tak, aby žádné dvě z nich nikdy neseděly na stejném místě.

(i) Dokažte, že pro liché n se to Pepovi vždy podaří.
(ii) Dokažte, že pro sudé n Pepa nemá šanci.

(IMO 2016-6)

Další zajímavé úložky

Následuje hromada dalších úloh, ke kterým se na přednášce nemáme šanci stihnout. Přesto stojí za řešení a vyskytují se v nich celkem trikové triky. Některé úlohy na konci příspěvku už mohou být dcela těžké – i malé hinty ale často dost pomohou. Přestože jsem se i úlohy v této části snažil seřadit podle obtížnosti, vůbec to nemusí být vypvídající.

Úloha 35. Konečná množina M bodů v rovině se nazývá *vyvážená*, pokud pro libovolné dva různé $A, B \in M$ existuje $P \in M$ splňující $|AP| = |BP|$. Říkáme, že M je *středuprostá*, pokud pro žádné tři různé body $A, B, C \in M$ neexistuje $P \in M$ splňující $|AP| = |BP| = |CP|$.

(i) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vyvážená M velikosti n.
(ii) Určete všechna $n \in \mathbb{N}$, pro něž existuje vyvážená středuprostá M velikosti n.

(IMO 2015-1)

Úloha 36. Je dán konvexní mnohoúhelník $A_1A_2\dots A_n$, ve kterém žádné dvě strany nejsou navzájem rovnoběžné. Označme $A_{n+1} = A_1$ a pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ označme A_{k_i} vrchol nejvzdálenější od přímky A_iA_{i+1}. Velikost úhlu $A_iA_{k_i}A_{i+1}$ označme α_i. Ukažte, že $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi$.

Úloha 37. Ukažte, že každý mnohoúhelník o obsahu alespoň n lze nakreslit do roviny, aby pokrýval alespoň $n+1$ mřížových bodů.

Úloha 38. Na bílý kruh jsou náhodně kápnuty čtyři černé tečky. S jakou pravděpodobností lze kruh rozdělit na čtvrtkruhy tak, aby v každém byla právě jedna?

Úloha 39. Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem a rozdělují jej na konečně mnoho obdélníkových čtvrtí. *Centrem* nazveme takovou čtvrť, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Předpokládejme, že existuje alespoň jedna hlavní ulice. Dokažte, že město má centrum. (ISL 2007)

Úloha 40. Do terče o poloměru 12 centimetrů jsme vystřeli 19 nábojů. Dokažte, že některé dva z nich jsou od sebe vzdáleny nanejvýš 7 centimetrů. (MO-59-A-III)

Úloha 41. Romeo a Julie jeli na výlet do rumunských hor. Stojí na opačných stranách pohoří ve stejné nadmořské výšce a chtějí se pohybovat tak, že stále budou mít stejnou nadmořskou výšku. Cesta mezi nimi tvoří graf lineární lomené funkce. Každý bod cesty je alespoň tak vysoko jako počáteční nadmořská výška Romea a Julie. Dokažte, že se mohou setkat. (MKS 24-1-7)

Úloha 42. Nechť S je množina alespoň dvou bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží na přímce. Větrným mlýnem rozumíme následující proces. Na počátku je vybrána nějaká přímka l procházející právě jedním bodem $P \in S$. Tato přímka se začne otáčet ve směru hodinových ručiček se středem otáčení P, dokud nenarazí na další bod množiny S, označme jej Q. Přímka se nadále otáčí ve směru hodinových ručiček, ovšem se středem otáčení Q, dokud nenarazí na další bod množiny S, a tak dále. Dokažte, že lze zvolit bod $P \in S$ a přímku l procházející bodem P tak, že jimi začínající větrný mlýn bude mít každý bod z S za střed otáčení nekonečněkrát. (IMO 2011-2)

Úloha 43. David si na kružnici nakreslil $4n$ různých bodů a pak je po směru hodinových ručiček střídavě obarvil modře a červeně. Červené body nějakým způsobem rozdělil do n dvojic a body v každé dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně n modrými úsečkami pospojoval modré body. Všiml si, že žádné tři barevné úsečky neprocházejí jedním bodem a že každý průsečík modré a červené úsečky je fialový. Dokažte, že na obrázku našel alespoň n fialových bodů. (MKS 34-1-7)

Úloha 44. V temném lese rostou tenké stromy, jejichž výška nepřekračuje 1007 metrů. Žádné dva stromy od sebe nejsou dál, než kolik činí rozdíl jejich výšek. Dokažte, že je možné celý les obehnat zdí dlouhou 2015 metrů. (MKS 26-1-7)

Úloha 45. V rovině je dáno několik bodů, přičemž všechny neleží na jedné přímce. Ukažte, že existuje přímka, na které leží právě dva z nich.

Úloha 46. V rovině je trojúhelník RGB. Rozdělíme jej na menší trojúhelníčky, aby žádný z nich neměl vrchol uvnitř strany jiného. Vrcholy obarvěme červeně, zeleně a modře, přičemž vrcholy původního velkého trojúhelníka dostanou různé barvy. Vrcholy na stranách velkého trojúhelníka navíc musí dostat barvu jedoho z krajních vrcholů dané strany. Dokažte, že některý z malých trojúhelníčků má vrcholy tří různých barev. (Spernerovo lemma)

Úloha 47. Půdorys galerie má tvar (ne nutně konvexního) n úhelníka. Kolik strážníků je v zvislosti na n potřeba, aby společně viděli celou galerii? (Art Gallery Problem)

Úloha 48. Na kruhovém ostrově je v písku nakreslen n-úhelník se stejně dlouhými stranami. Ve středu každé strany čekají zády k sobě dva ptakopysci. Najednou se všichni rozběhnou po stranách, na kterých stojí, a po přímce pokračují až k pobřeží. Ukažte, že můžeme ptakopysky rozdělit do dvou skupin tak, že součet uběhnutých vzdáleností v obou skupinách bude stejný. (MKS 36-1j-7)

Úloha 49.

(i) Na kolik nejvýše části může n přímek rozdělit rovinu?
(ii) Ukažte, že v tomto případě je mezi nimi pro $n \geq 4$ alespoň $\frac{2n-2}{3}$ trojúhelníků.

Úloha 50. V jednotkovém kruhu leží 60 bodů. Ukažte, že existuje bod na jeho hranici, jehož součet vzdáleností od červených bodů nepřevyšuje 80. (ČPS 2009/2010)

Úloha 51. Konečný soubor čtverečků má celkový obsah 4. Dokažte, že jimi umíme pokrýt jednotkový čtverec.

Úloha 52. V rovině leží 100 bodů tak, že žádné tři z nich neleží na jedné přímce. Ukažte, že mezi všemi trojúhelníky, které tyto body tvoří, je nejvýše 70% procent ostroúhlých. (IMO 1970-6)

Úloha 53. Dokažte existenci konstanty $0 < c < 1$ splňující: každý mnohoúhelník P s obsahem 1 lze posunout o $\frac{1}{100}$ nějakým směrem tak, aby výsledný mnohoúhelník Q pronikal P v ploše s obsahem nejvýše c. (USA TSTST 2018/2019)

Úloha 54. V rovině je dáno $2n+1$ bodů v obecné poloze. Kružnice k procházející třemi z nich se nazývá modrá, pokud uvnitř k leží stejně zbylých bodů jako vně k. Dokažte že počet modrých kružnic má stejnou paritu jako n.

Úloha 55. V rovině je n přímek, přičemž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Tyto přímky rozdělují rovinu na oblasti. Dokažte že pro n dostatečně velké lze obarvit alespoň $\sqrt{n}$ přímek namodro tak, aby žádná z konečných oblastí neměla celou hranici modrou. (IMO 2014-6)

Úloha 56. Je možné přiřadit nenulová reálná čísla bodům roviny tak, aby součet hodnot ve vrcholech každého pravidelného 2015-úhelníku byl nulový? (iKS 5-C3)

Úloha 57. Ukažte, že existuje konvexní 1990-úhelník, který má všechny všechny úhly stejné, a délky jeho stran jsou v nějakém pořadí rovny 1^2, 2^2, 3^2, …, 1990^2. (IMO 1990-6)

Úloha 58. Nechť S je čtverec se stranami délky 100 a L je lomená čára uvnitř S, která se neprotíná (ani nedotýká). Předpokládejme, že pro každý bod P na hranici S je možné nalézt bod na L, který není od P dál než $\frac{1}{2}$. Dokažte, že je možné na L najít dva body X, Y takové, že $|XY| \leq 1$, ale délka L mezi X a Y je alespoň 198. (IMO 1982-6)

Úloha 59. Čtverec je rozřezán na trojúhelníky tak, že žádné tři vrcholy těchto trojúhelníků neleží na přímce. Pro každý vrchol včetně původních vrcholů čtverce si zapamatujeme počet z něj vycházejících úseček. Mohou být všechna tato čísla sudá? (iKS 5-C1)

Úloha 60. V rovině postává 24 robotů. Každý z nich má zorný úhel o velikosti $70°$ stupňů. Kolik nejvýše mezi nimi může být uspořádaných dvojic různých robotů (R_1, R_2) takových, že robot R_1 vidí robota R_2?

Úloha 61. Najděte všechny reálná čísla $k \geq 1$, pre které se obdélník $1 \times k$ nedá rozdělit na dva podobné neshodné mnohoúhelníky. (iKS 5-C4)

Úloha 62. Několik identických papírových čtverečků n různých barev leží na obdélníkovém stole, strany čtverečků jsou rovnoběžné se stranami stolu. Mezi každou n-ticí různobarevných čtverečků lze najít dva, které se překrývají. Dokažte, že všechny čtverečky některé barvy umíme přišpendlit ke stolu pomocí $2n - 2$ špendlíků. (ARO 2003)

Úloha 63. V rovině je daných konečne mnoho pásů se součtem šířek X a kruh s poloměrem 1. Dokažte, že pro $X = 7$ pásy umíme posunout tak, aby pokryly celý kruh. Jak moc umíte tuto konstantu vylepšit? (iKS 4-C3)

Úloha 64. Každé straně b konvexního mnohoúhelníku P přiřadíme maximální obsah trojúhelníku, který celý leží v P a jehož jedna strana je b. Dokažte, že součet obsahů přiřazených všem stranám mnohoúhelníku P je větší nebo roven dvojnásobku obsahu mnohoúhelníku P. (IMO 2006-6)

Závěrem

No, úloh je tu snad je na zabavení dost. Samozřejmě se ale člověk může zkusit zabývat sofistikovanějšími technikami. Existuje celá řada vět o vlastnostech konvexních množin v $\mathbb{R}^d$ jako například *Hellyho věta*. Pomocí nich se pak dají řešit i některé úlohy s olympiádním nádechem – víc se dá dozvědět třeba v příspěvku Davida Hrušky. Jiný zajímavý směr tvoří výsledky okolo *Pickovy formule* a *Minkowského věty*, které se zabývají vlastnostmi mřížových bodů.

A samozřejmě je tu toho mnohem víc – k problémům kombinatorické geometrie se obloukem vrací mnoho hlubokých výsledků analýzy, algebry i topologie. Ale teď už je čas popřát si dobrou noc, zavřít oči a spát.

Literatura a zdroje

[1] David Hruška; *Kombinatorická geometrie*, Sborník *i*KS, 2015
[2] Mirek Olšák; *Kombinatorická geometrie*, 2011 Blansko-Obůrka
[3] Mirek Olšák; *Kdopak by se IMO šestky bál?*, 2014 Uhelná Příbram
[4] Pepa Tkadlec; *Provárky*
[5] *http://www.artofproblemsolving.com*
[6] Radovan Švarc; *Dvě neobvyklé existenční techniky* 2016 Hojsova Stráž
[7] Djukic, Jankovic, Matic, Petrovic; *The IMO Compendium*
[8] Libor Barto; *Kombinatorická geometrie*, 2000

Hinty

Hint 1. Projeďte ho skartovačkou.
Hint 2. Co kdyby skrz sebe uměli proběhnout?
Hint 3. Indukce.
Hint 4. Konvexní obal a nafukování.
Hint 5. Liška sedí uvnitř nějakého trojúhelníka nějaké triangulace.
Hint 6. Nejdřív vždy náhodně vyberte průměr a pak až jeden z jeho krajních bodů.
Hint 7. Na vnitřním rybníčku se čtvrtinovým poloměrem je kachnička rychlejší.
Hint 8. Ano.
Hint 9. Položte obdélník na šachovnici se čtverečky o straně $\frac{1}{2}$.
Hint 10. Ne. Připevněte k rovnostrannému trojúhelníku tři úzké oblouky.
Hint 11. Zacpěte studnu sférou.
Hint 12. Orientace trojúhelníka.
Hint 13. Každý řez krájí sudý počet čokolád.
Hint 14. Trojúhelníková síť.
Hint 15. Promítněte na přímku.
Hint 16. Diskrétní spojitost.
Hint 17. Začněte s trojúhelníkem s vrcholy v S s maximálním obsahem.
Hint 18. Nejbližší strana.
Hint 19.
Hint 20. Nafukujte.
Hint 21. Vezměte bod na konvexním obalu s velkým úhlem.
Hint 22. Na druhé kružnici si vyberme bod O. Které polohy bodu O na první kružnici zakazují vyznačené body?
Hint 23. Cesty z rovnoběžníků spojují protilehlé strany.
Hint 24. Co se stane s paritou, když O překročí úsečku?
Hint 25. Nejvzdálenější dvojice bodů.
Hint 26. Dvakrát vhodně posuňte původní body a nakonec ještě něco ušetřete.
Hint 27. Každému růžovému bodu přiřaďte rohy křižovatek tvaru T, které vidí.
Hint 28. Dva body jde oddělit od zbytku dvěma přímkami. Zkuste naopak střídavě rozmístit všechny body na kružnici.
Hint 29. Pro $0 \leq x \leq 1$ interpretujte levou stranu jako pravděpodobnost nějakého jistého jevu.
Hint 30. Búno jsou na konvexním obalu jenom ovečky. Diskrétní spojitost.
Hint 31. Šachovnicové obarvení.
Hint 32.
Hint 33. Dvojobarvení oblastí, barva odpovídá směru obcházení.
Hint 34. Seřaďte si úsečky podle jejich směrů.
Hint 35. Konstrukce: n-úhelník; šikovné body na kružnici se středem. Spočtěte, že druhá konstrukce pro sudá n nejde.
Hint 36. Otáčejte přímkou kolem jednotlivých A_{k_i}.
Hint 37. Nakrájejte mnohoúhelník mřížkou a vzniklé dílky naskládejte na sebe.
Hint 38. Při kapání nejdřív zvolte pravoúhlý kříž, potom bod obvodu.

Hint 39. Vjeďte do města a zatáčejte tak, abyste z něj nevyjeli.
Hint 40. 18 částí a Dirichletův princip.
Hint 41. Vytvořte graf, jehož vrcholy jsou ty body pohoří, jejichž nadmořská výška je stejná jako nějaký vrchol, údolí, či kraj. Jaké jsou stupně jeho vrcholů?
Hint 42. Vezměte přímku l, která téměr půlí ostatní body.
Hint 43. Vyrazte na procházku po modrých úsečkách; na modrých křižovatkách zahněte doprava, ve fialovém bodu se zastavte.
Hint 44. Pospojujte stromy sestupně podle velikosti.
Hint 45. Vezměte přímku, jejíž vzdálenost od jiného vyznačeného bodu je minimální.
Hint 46. Zamyslete se nad stupni vrcholů rovinného grafu, jehož vrcholy jsou oblasti a hrany odpovídají jejich sousedství.
Hint 47. Triangulujte. Vrcholy obarvěte třemi barvami tak, aby trojúhelníky byly trojbarevné.
Hint 48. Mocnost z vrcholů.
Hint 49. Pro první část indukce. Pro druhou část se u každé přímky podívejte na nejbližší průsečíky.
Hint 50. Vezměte libovolný rovnostranný trojúhelník vepsaný do kruhu a ukažte, že jeden z jeho vrcholů vyhovuje.
Hint 51. Čtverce zmenšete tak, aby měly strany délek $\frac{1}{2^n}$ a celkový obsah alespoň 1.
Hint 52. Co kdyby byly jen 4? A co 5?
Hint 53. Stačí dokázat, že střední hodnota obsahu průniku je malá.
Hint 54. Dokažte, že počet kružnic procházejících dvěma pevnými body je lichý.
Hint 55. Hladově obarvujte modře. (Taky funguje pravděpodobnostní metoda, která dává lepší odhad.)
Hint 56. Vyberte si 2015-úhelník a rotujte ho okolo jednoho jeho vrcholu.
Hint 57. Protějším směrům dejte následující čísla, což převede problém na hledání nějakého $5 \cdot 199$-úhelníku. Směry rozdělte pětiúhelníky a jim dejte čísla opět postupně podle velikosti.
Hint 58. Postupně kreslete L. Po uspokojení první stěny čtverce budou k ní přilehlé stěny neuspokojené.
Hint 59. Ne. Obarvěte stěny dvěma barvami, spor poplyne spočtením hran.
Hint 60. Optimální jsou roboti ve vrcholech zanořených rovnostranných trojúhelníků.
Hint 61. Zkuste jej rozdělit lomenou čárou pro daný koeficient podobnosti. Pro která k to zafunguje?
Hint 62. Indukce, vezměte obdélník nejvíce vlevo.
Hint 63. Setřiďte pásky podle směru, objeďte obvod kružnice.
Hint 64. Nejdřív převeďte na: V $2n$ úhelníku o obsahu S se dá najít takový trojúhelník s obsahem alespoň $\frac{S}{n}$. To pak dokažte dokreslením hlavních diagonál a uvažováním pokrytí „motýly“ tvořenými vedlejšími diagonálami.