mezinárodní korespondenční seminář iksko.org

Kombinatorické identity

Jakub Löwit

Abstrakt. V přednášce se budeme zabývat nahlížením různých identit. V první části si připomeneme všemožná kombinatorická pozorování, která nám takové nahlížení umožní. V druhé části představíme takzvaný *diskrétní kalkulus* – malého bratříčka derivací a integrálů – a ukážeme si některá jeho pěkná použití.

Na světě existuje nepřeberné množství různých identit s kombinačními čísly. Podobně existuje nepřeberné množství metod, jak takové identity hledat a dokazovat. My si ukážeme dva – velmi odlišné – přístupy.

Prvním bude *kombinatorické nepočítání*, které nám umožní řešit příklady meditací nad zadáním. Nepočítání umí být velmi zábavné a elegantní, občas ale vyžaduje netriviální dávku invence.

V druhé půlce přednášky si naopak ukážeme takzvaný *diskrétní kalkulus*. To je metoda ryze početní. Některé snadné úlohy tak může řešit zbytečně složitě, jindy ale poskytuje přehledný a přímočarý způsob jejich uchopení.

Upřímně však přiznejme: na některé úlohy nestačí ani jeden z těchto přístupů.

Úmluva. Není-li řečeno jinak, všechna čísla v tomto příspěvku jsou celá.

Úmluva. V textu se vyskytuje několik poznámek označených jako *formální*. Ty typicky vysvětlují vcelku nedůležité konceptuální detaily. Pokud jsou matoucí, mohou být s klidem v duši ignorovány.

Kombinace

Definice. Mějme celé číslo $n \geq 0$. Potom $n! = n(n-1)\cdots 1$ značí počet možností, jak seřadit n předmětů.

Definice. Mějme celá čísla $n \geq k \geq 0$. Kombinační číslo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pak značí počet možností, jak vybrat z n předmětů nějakou k-tici.

Základní vlastností kombinačních čísel je platnost binomické věty.

Tvrzení (Binomická věta). Pro $n \geq 0$ platí polynomiální identita

$$\sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-i} \binom{n}{i} = (x+y)^n.$$

Navíc se dají přehledně uspořádat do *Pascalova trojúhelníku*.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \end{array}$$

Pascalův trojúhelník může na první pohled působit banálně. Přesto nám ale dává dobrou grafickou interpretaci různých algebraických identit. A taková interpretace se může hodit jak pro jejich zapamatování, tak pro jejich použití.

Nepočítací rozcvička

Začneme několika nejdůležitějšími vztahy kombinačních čísel, které lze všechny nahlédnout kombinatoricky. Rozmyslet si následujících pár úloh bez počítání by měla být poměrně dobrá investice. Pro grafickou názornost si je posléze můžeme vepsat do Pascalova trojúhelníka.

Úloha 1. Pro $n \geq i \geq 0$ dokažte
$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}.$$

Úloha 2. Pro $n \geq i \geq 0$ dokažte
$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Úloha 3. Pro $n \geq 0$ dokažte
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

Úloha 4 (Vandermonde). Pro $n, m, r \geq 0$ splňující $m + n \geq r$ nahlédněte
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}.$$

Úloha 5. Pro $n, r \geq 0$ nahlédněte
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+r}{r} = \binom{n+r+1}{r+1}.$$

Úloha 6. Pro $n \geq 0$ dokažte
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

Snadné identity

V zájmu dalšího procvičení přidejme ještě několik snadnějších identit.

Úloha 7. Pro $n \geq k \geq 0$ dokažte

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Úloha 8. Pro $n \geq r \geq k \geq 0$ nahlédněte

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

Úloha 9. Pro $n \geq 0$ nahlédněte

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Úloha 10. Pro $n \geq m \geq 0$ ukažte

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{n-i}{m-i} = \binom{n}{m}2^m.$$

Úloha 11. Pro $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Úloha 12. Pro $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Inkluze a exkluze

Ukažme si nyní takzvaný *princip inkluze a exkluze* – kombinatorické tvrzení, které dává do souvislosti velikost sjednocení a průniků pro nějaký systém množin.

Tvrzení (Princip inkluze a exkluze). Mějme konečnou množinu indexů I velikosti $|I| = n$ a systém konečných množin $(A_i)_{i \in I}$. Potom platí

$$\Big|\bigcup_{i \in I} A_i\Big| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq I} (-1)^{|J|+1} \Big|\bigcap_{j \in J} A_j\Big|.$$

Jinými slovy, na určení sjednocení všech A_i nám stačí znát velikosti průniků všech jejich neprázdných skupinek.

Poznámka (formální). Trochu víc konceptuálně lze $\bigcup_{i\in I} A_i$ vnímat jako průnik prázdného systému. Princip inkluze a exkluze pak můžeme přepsat do údernějšího tvaru

$$\sum_{J\subseteq I}(-1)^{|J|}\left|\bigcap_{j\in J} A_j\right| = 0.$$

Vraťme se teď k tématu naší přednášky, kombinatorickým identitám. Máme-li nějaký systém množin $(A_i)_{i\in I}$, princip inkluze a exkluze nám dovoluje spočítat velikost jeho sjednocení dvěma způsoby. Při sčítání kombinatorických sum pak řešíme opačný problém – lze sumu interpretovat pomocí principu inkluze a exkluze? Zejména výskyt alternujících znamének může být dobrým indikátorem takové interpretace.

Úloha 13. Pro $n \geq 0$ sečtěte

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(n-i)\binom{n}{i}.$$

Úloha 14. Pro $n \geq 0$ pomocí principu inkluze a exkluze znovu nahlédněte

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0.$$

Úloha 15. Pro $n \geq 0$ určete hodnotu součtu

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^n.$$

Úloha 16. Pro $m > n \geq 0$ spočtěte

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(m-i)^n.$$

Úloha 17. Pro celé $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)!\right) = n!.$$

Další triky

Dosavadní ponaučení by mělo být následující: „porovnávací“ kombinatorická tvrzení se dají přepisovat do algebraických identit. Pokud tedy chceme dokázat nějakou podezřelou algebraickou identitu, můžeme ji zkusit kombinatoricky interpretovat – pokud se to povede, máme vyhráno. Vhodná kombinatorická interpretace ale občas může být dost triková.

Úloha 18. Pro přirozená m, n nahlédněte dělitelnost $m!(n!)^m \mid (mn)!$.

Úloha 19. Pro $s, t \geq 0$ spočtěte

$$\sum_{j=0}^{t} \binom{s+j}{j} 2^{t-j} + \sum_{j=0}^{s} \binom{t+j}{j} 2^{s-j}.$$

Úloha 20. Pro $n \geq 0$ označme

$$g(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} 2^{2i}.$$

Dokažte $g(n) + g(n-1) = 3^{n-1}$.

Úloha 21. Pro $n \geq 0$ dokažte

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 2^{2n}.$$

Úloha 22. Pro $n \geq 0$ sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+1)(n-i+1)} \binom{2i}{i} \binom{2(n-i)}{n-i}.$$

Úloha 23. Pro $n \geq 0$ označme

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k.$$

Dokažte $f(n) + f(n-1) = 2^n$.

Diskrétní kalkulus

Pojďme se teď na počítání sum podívat z úplně jiného úhlu. Začneme motivační úlohou.

Úloha 24. Sečtěte

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

(folklor)

Řešení. Trikově upravme.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Vskutku, v prvním kroku jsme pouze upravili zlomek uvnitř sumy; v druhém kroku se požrala většina sousedních členů.

Přijít na takový trik napoprvé určitě není lehké. Ale když už o něm víme, nejde zobecnit i na další sumy? Pointa předchozího výpočtu přece spočívala pouze ve vyjádření členů sumy pomocí rozdílů následujících členů nějaké vhodné posloupnosti.

Naším základním objektem budou celočíselné posloupnosti – ty si budeme představovat jako funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ nebo trochu obecněji $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Posloupnosti umíme sčítat i násobit po prvcích; každé $c \in \mathbb{Z}$ určuje konstantní posloupnost s odpovídající hodnotou.

Definice. Diskrétní derivací funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ myslíme funkci Δf definovanou jako

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Značení. Pro $n \geq 0$ značíme symbolem $\Delta^n f$ opakované n-násobné použití diskrétní derivace na funkci f. Funkce $\Delta^n f$ se nazývá *n-tá diskrétní derivace* funkce f.

Definice. Diskrétním integrálem funkce $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ myslíme libovolnou funkci $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující $\Delta g = f$. Značíme jej Σf.

Poznámka. Diskrétní integrál funkce f je jednoznačně určený až na přičtení celočíselné konstanty c. Striktně vzato, symbol Σf označuje jednu konkrétní volbu diskrétního integrálu. Všechny ostatní pak můžeme získat přičítáním celočíselných konstant.

Poznámka (formální). Ještě trochu formálněji, symbol Σf může označovat množinu všech diskrétních integrálů funkce f. Tím se lze zbavit vší nejednoznačnosti.

Poznámka (formální). Definice diskrétní derivace Δ a diskrétního integrálu Σ se nápadně podobají definicím derivace a integrálu reálných funkcí a v mnoha ohledech se proto chovají podobně. My však tuto analogii k ničemu potřebovat nebudeme.

Z našich definic je jasné, že operace Δ a Σ jsou k sobě v podstatě inverzní – pro jakoukoli posloupnost f platí $\Delta\Sigma f = f$, zatímco $\Sigma\Delta f = f$ platí až na přičtení konstanty.

Diskrétní integrál Σf má ale mnohem přímočařejší interpretaci – až na konstantu je dán prefixovými součty posloupnosti f. Přesněji, pro libovolná $a \leq b \in \mathbb{Z}$ platí*)

$$(\Sigma f)(b+1) - (\Sigma f)(a) = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b).$$

Skutečně – pokud totiž zafixujeme a, obě strany rovnosti mají stejnou diskrétní derivaci jakožto funkce proměnné b a zároveň se rovnají pro $b = a$.

Všimněme si přitom, že levá strana rovnosti nezávisí na konkrétní volbě diskrétního integrálu – přičtení jakékoli konstanty c k funkci Σf je irelevantní. Na spočtení dlouhého součtu napravo nám tak stačí nalézt diskrétní integrál funkce f a dosadit do něj dvě hodnoty. Zkoumání diskrétních derivací a integrálů nám tak – mimo jiné – dává přímočaré metody sčítání různých sum.

Výše zmíněný rozdíl hodnot posloupnosti v bodech a, b se někdy značí následujícím způsobem.

Definice. Pro funkci $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a hodnoty $a, b \in \mathbb{Z}$ označme

$$[g]_a^b = g(b) - g(a).$$

Předchozí vztah tak můžeme přepsat jako $[\Sigma f]_a^{b+1} = \sum_{i=a}^{b} f(i)$. Čistě z technických důvodů si ještě zavedeme značení pro posun indexů dané posloupnosti.

Definice. Pro posloupnost $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definujeme její *posunutí* Ef pomocí předpisu $Ef(a) = f(a+1)$. Obecněji, pro celé n značíme $E^n f$ posloupnost definovanou jako $E^n f = f(a+n)$.

Poznámka (formální). Symboly Δ, Σ, E vždy umíme napsat před nějakou posloupnost f, a tím získat novou posloupnost. S trochou představivosti je proto můžeme vnímat jako *operátory na množině všech posloupností.* Tento pohled trochu zjednodušuje značení: chceme-li třeba říct „při výpočtech nezáleží na vzájemném pořadí diskrétního derivování a posouvání“, stačí napsat $E\Delta = \Delta E$. Podobně je zřejmé, že operátor Δ^n je n-násobným složením operátoru Δ.

Cvičení. Spočtěte Δf a Σf konstantní posloupnosti f s hodnotou 1.

Cvičení. Spočtěte Δf a Σf Fibonacciho posloupnosti f definované na nezáporných celých číslech.

Cvičení. Buď $d \geq 0$. Jaká je diskrétní derivace posloupnosti $f(x) = \prod_{i=0}^{d} \frac{1}{x-i}$ definované na přirozených číslech?

Cvičení. Je-li funkce f zadaná polynomem, platí $\deg \Delta f < \deg f$.

---

*) Pozor na indexy! Na levé straně opravdu vystupuje $b+1$, ale napravo sčítáme jenom k b.

Cvičení. n-tá diskrétní derivace posloupnosti f je explicitně dána vztahem

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \cdot \binom{n}{i} \cdot f(x+i).$$

Diskrétní derivace se chovají pěkně ke sčítání a přeškálovávání posloupností. Zároveň se však chovají rozumně i k násobení.

Tvrzení (Základní vlastnosti diskrétní derivace).

(i) Buď $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ posloupnost a $c \in \mathbb{Z}$. Potom platí $\Delta(c \cdot f) = c \cdot \Delta f$.
(ii) Mějme dvě posloupnosti $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Potom platí $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$.
(iii) Mějme dvě posloupnosti $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Potom platí $\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + \Delta f \cdot Eg$. Tato rovnost se někdy označuje jako *Leibnitzovo pravidlo.*

Důsledek. Mějme dvě posloupnosti $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Potom platí

$$\Delta^n (f \cdot g) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (\Delta^i f) \cdot (\Delta^{n-i} E^i g).$$

Z předchozího tvrzení vyplývají obdobné vlastnosti pro diskrétní integrály – ty tedy opět respektují přeškálovávání a sčítání. Pro násobení dostáváme přepsáním Leibnitzova pravidla takzvanou *integraci per partes*:

$$\Sigma(f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \Sigma(\Delta f \cdot Eg).$$

Integraci per partes lze interpretovat následovně. Chceme-li určit diskrétní integrál součinu dvou funkcí f, h a zároveň známe diskrétní integrál g funkce h, stačí nám alternativně spočítat diskrétní integrál součinu $\Delta f \cdot Eg$.

V mnoha případech se může hodit repertoár některých základních diskrétních derivací – nejdůležitější pro nás budou následující dvě a jejich drobné obměny.

Tvrzení (Diskrétní derivace některých funkcí).

(i) Buď $c \in \mathbb{Z}$. Posloupnost $f(x) = c^x$ má diskrétní derivaci $\Delta f(x) = (c-1)c^x$.
(ii) Buď $d \in \mathbb{N}$. Posloupnost $f(x) = \binom{x}{d}$ má diskrétní derivaci $\Delta f(x) = \binom{x}{k-1}$.

Všimněme si, že funkce $\binom{x}{d} = \frac{1}{d!} \prod_{i=0}^{d-1} (x-i)$ je polynomem v proměnné x s racionálními koeficienty. Její násobek $d! \cdot \binom{x}{d} = \prod_{i=0}^{d-1}(x-i)$ je pak polynom s celočíselnými koeficienty – tento polynom se mnohdy dlouze nazývá *d-tá klesající mocnina* a značí se $x^{\underline{d}}$. Z druhé části našeho tvrzení pak vyplývá následující.

Důsledek.*) Funkce $f(x) = x^{\underline{d}} = \prod_{i=0}^{d-1}(x-i)$ má diskrétní derivaci $d \cdot x^{\underline{d-1}}$.

Poznámka. Klesající mocniny lze smysluplně definovat i pro záporná d jako $x^{\underline{d}} = \prod_{i=0}^{d} = \frac{1}{x-i}$. Vztah z předchozího důsledku pak platí pro všechna $d \neq 0$.

---

*) Z hlediska diskrétní derivace se tedy $x^{\underline{d}}$ chová podobně jako x^d vzhledem k derivacím reálným.

Kalkulujme...

Pojďme si teď nabyté znalosti vyzkoušet na několika příkladech. Jak už jsme zmínili výše, nejpřímočařejším použitím diskrétního kalkulu je prosté sčítání sum. Myšlenka je přímočará. Sumační index si představíme jako proměnnou a posléze se pokusíme spočítat diskrétní integrál posloupnosti v sumě. Pokud se to povede, stačí správně dosadit krajní hodnoty.

Úloha 25. Pro $n \geq 0$ sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1).$$

Úloha 26. Pro $n \geq 0$ znovu sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

Rozmyslete si, že podobně umíme postupovat i pro vyšší exponenty.

Úloha 27. Pro $n \geq 0$ sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^i.$$

Úloha 28. Pro $n \geq 0$ sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2.$$

Myšlenka diskrétního kalkulu se může hodit i ve více kombinatorických úlohách. Pokud se třeba snažíme vyjádřit nějakou kombinatoricky zadanou posloupnost algebraickým předpisem, stačí kombinatoricky určit její diferenci. I když člověk diskrétní kalkulus moc nezná, dívat se na diference se zkrátka vyplatí.

Přemýšlejme...

Čas od času však člověk může narazit i na sofistikovanější úlohu, kterou výše předvedená teorie značně ulehčí.

Úloha 29. Pro $m > n \geq 0$ znovu sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (m-i)^n.$$

Úloha 30. Pro $n \geq 0$ znovu sečtěte

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^n.$$

Úloha 31. Buď p prvočíslo. Posloupnost celých čísel $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ se nazývá *péčková*, jestliže pro každé přirozené číslo e existuje takové $d \geq 0$, že pro všechna celá $m \geq d$ platí

$$p^e \mid \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} z_i.$$

Dokažte, že pokud jsou obě posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ péčkové, je péčková i posloupnost $(x_n y_n)_{n=0}^{\infty}$. (USA TST 2011)

Úloha 32. Pro $n > m \geq 0$ dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{2n+1}{n-k} \cdot (2k+1)^{2m+1} = 0.$$

(Crux 2019)

Úloha 33 (Pólya).*) Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ s racionálními koeficienty se nazývá *numerický*, jestliže se dá zapsat jako celočíselná lineární kombinace polynomů $\binom{x}{d}$ pro $d \in \mathbb{N}_0$. Dokažte, že polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ je numerický právě tehdy, když na celých číslech nabývá pouze celočíselných hodnot.

Literatura a zdroje

[1] Martin Tancer: *Kombinatorika*, PraSe, seriál 2007/2008
[2] Mirek Olšák: *Kombinatorické nepočítání*, *i*KS 2016
[3] Štěpán Šimsa: *Počítání dvěma způsoby*, PraSe 2013, Horní Lysečiny
[4] Michal Szabados: *Diskrétny kalkulus*, PraSe 2010, Oldřichov
[5] Dragomir Grozev: *Finite Differences in Olympiads*

*) Toto tvrzení tedy v jistém smyslu vysvětluje, proč se kombinační čísla objevují tak často: kdykoli lze nějakou celočíselnou posloupnost definovat racionálním polynomem, už se dá zapsat jako jejich celočíselná kombinace.

Hinty

Hint 1. Vybrat nějakou k-tici je to samé jako vybrat její doplněk.
Hint 2. Rozlište, zda byl do výsledné $(i+1)$-tice vybrán jeden konkrétní prvek.
Hint 3. Počet možností jak vybrat podmnožinu n-prvkové množiny.
Hint 4. Rozdělte případy podle toho, jak je r předmětů rozděleno mezi m a n.
Hint 5. Vybíráme $r+1$ předmětů ze seřazených $n+r+1$. Rozdělte případy podle nejvyššího vybraného předmětu.
Hint 6. Lichých podmnožin n prvkové množiny je stejně jako sudých. Zafixujte jeden prvek, bijekci definujte jeho přidáváním/odebíráním.
Hint 7. Z n-lidí vyberte k-členné družstvo a zvolte mu kapitána.
Hint 8. Z n lidí zvolte družstvo velikosti r a jeho poddružstvo velikosti k.
Hint 9. V řadě je $n+1$ políček. Vyberte některé z nich a do políček vlevo od něj položte dvě rozlišitelné figurky.
Hint 10. Z n kuliček vyberte m kuliček, vybrané kuličky obarvěte dvěma barvami.
Hint 11. Vybírejte dětské družstvo libovolné velikosti a jednomu dítěti dejte bonbon.
Hint 12. Postupujte podobně jako v předchozí úloze – mezi vybrané děti ale rozdejte dva bonbony.
Hint 13. Uvažte $A_i = \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Vyjde n.
Hint 14. Vezměte n krát tu samou jednoprvkovou množinu $A_1 = \dots = A_n = \{1\}$. Ale ano, výsledek úlohy jsme potřebovali při důkazu principu inkluze a exkluze.
Hint 15. Pro $i = 1, \dots, n$ zvolte za A_i množinu těch funkcí $f\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, které nenabývají hodnoty i. Výsledný součet je $n!$.
Hint 16. Vizte předchozí hint, pouze někde zaměňte n za m. Vyjde 0. No není to veselé?
Hint 17. Pomocí principu inkluze a exkluze interpretujte vnitřní sumu jako počet permutací k-prvkové množiny bez pevného bodu.
Hint 18. Kolika způsoby lze rozdělit mn lidí do m stejně velkých skupin?
Hint 19. Interpretuje sumu jako počet způsobů jak obarvit $s+t+1$ kuliček stříbrnou a tyrkysovou. Nejprve rozdělte případy podle toho, zda je stříbrných ostře víc než s, nebo tyrkysových ostře víc než t. Vyjde 2^{s+t+1}.
Hint 20. Interpretujte $g(n)$ jako počet slov nad abecedou $\{a, b, c\}$, která obsahují lichý počet a a sudý počet b.
Hint 21. Cesty v mřížce, které vedou doprava a nahoru. Levá strana dává cesty v mřížce $n \times n$ z rohu do rohu s význačným bodem na diagonále. Vytvořte bijekci s cestami délky $2n$, které mohou končit kdekoli. Pro další hint se podívejte do Mirkova starého příspěvku na nepočítání.
Hint 22. Znáte Catalanova čísla, tj. počet cest mřížce $n \times n$ nepřekračujících diagonálu. Potřebujete o nich vědět dvě věci. Vyjde $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
Hint 23. Zase mřížka.
Hint 24. Přečtěte si řešení.
Hint 25. Diskrétní integrál funkce $x(x+1)$ už – až na posunutí – znáte. Výsledek bude $\frac{1}{3}(n+2)(n+1)n$.
Hint 26. Rozepište polynom x^2 pomocí klesajících mocnin, jejichž diskrétní integrály už znáte. Vyjde $\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$. Podobný postup funguje pro jakýkoli pevně zvolený exponent

– pouze je třeba přecházet mezi běžným tvarem polynomu a jeho rozepsáním do klesajících mocnin.

Hint 27. Diskrétní integrál funkce 2^x je opět 2^x, použijte per partes. Pozor na posun indexu! Vyjde $2^{n+1}(n-1)+2$.

Hint 28. Per partes. A pak? Per partes. Pokud se nepřepočítáte, vyjde $\frac{(-1)^n n(n+1)}{2} = (-1)^n\binom{n+1}{2}$.

Hint 29. Vezměte polynom $f(x) = (m-x)^n$. Jaký stupeň má Δf? Vyjádřete její hodnotu v 0 druhým způsobem.

Hint 30. Vezměte polynom $f(x) = x^n$ a opět se zamyslete nad polynomem $\Delta^n f$ a jeho hodnotou v 0.

Hint 31. Posloupnost f je péčková, právě když se $\Delta^m f(0)$ při zvětšování m stává víc a víc dělitelné p. Použijte Leibnitzovo pravidlo. Co zbývá ukázat o výrazech $\Delta^m g(j)$ pro péčkovou posloupnost g a čísla $j \geq 0$?

Hint 32. Tipněte polynom $f(x) = (2n+1-2x)^{2m+1}$. Spočtěte $\Delta^{2n+1} f(0)$ jednoduše a složitě. Posléze formálně přepište Leibnitzovskou sumu jako dvojnásobek zadaného výrazu.

Hint 33. Použití operací Δ a Σ zachovává numeričnost. Úlohu dokazujte indukcí podle stupně f.