mezinárodní
korespondenční
seminář
iksko.org

Lagrangeova interpolace

Jakub Löwit

Abstrakt. Dostaneme-li několik bodů, umíme nalézt polynom, který jimi přesně prochází? Jak vysoký stupeň takový polynom bude muset mít? A lze takové úvahy nějak rozumně využít při řešení olympiádních úloh? Na všechny tyto otázky se v příspěvku pokusíme odpovět.

Intro k interpolaci

Nejprve si ukážeme, jak zadanou $n+1$-ticí bodů provést polynom stupně nepřesahujícího n. Po zbytek přednášky pak budeme z této znalosti bohatě čerpat.

Věta. Ať $x_0, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ je $n+1$-tice po dvou různých reálných čísel, dále mějme libovolná reálná čísla $y_0, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Pak existuje jednoznačně určený reálný polynom f stupně nejvýše n takový, že $f(x_i) = y_i$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$.

Důkaz: Definujme $f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Protože x_i byla po dvou různá, je f dobře definovaný reálný polynom proměnné x stupně nejvýše n.

Zbývá ukázat, že jako takový je f určen jednoznačně. Vezměme libovolný reálný polynom g, který prochází všemi $n+1$-danými body a má stupeň nejvýše n. Potom $h = f - g$ je opět reálný polynom stupně nejvýše n, přičemž $h(x_i) = y_i - y_i = 0$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. Pokud ale má reálný polynom v nějakém bodě x_i kořen, musí být dělitelný polynomem $x - x_i$. Polynom h má ale víc kořenů, než jaký má stupeň, tedy je to nulový polynom, odkud $f = g$. ■

Definice. Polynom f z předchozího tvrzení nazýváme Lagrangeův interpolační polynom.

Na interpolační předpis můžeme nahlížet tak, že každý polynom stupně nejvýše $n+1$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci $n+1$ polynomů, které mají právě v jednom z bodů x_i hodnotu jedna a ve všech ostatních x_i se nulují.

Poznámka. Věta a Lagrangeově interpolaci neplatí pouze pro reálné polynomy, ale také pro polynomy nad $\mathbb{Z}_p$ pro libovolné prvočíslo p.

Důkaz poznámky je zcela analogický předešlému důkazu. Obecněji, věta o Lagrangeově interpolaci funguje pro libovolné těleso T. Nás ale stejně žádná jiná tělesa než ta výše uvedená zajímat nebudou.

Úloha 1. Ať $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ jsou po dvou různá a $c_0, c_1, \ldots, c_n \in R$ libovolná. Potom má soustava rovnic

$$
\begin{aligned}
a_0 + b_0 a_1 + b_0^2 a_2 + \ldots + b_0^n a_n &= c_0,\\
a_0 + b_1 a_1 + b_1^2 a_2 + \ldots + b_1^n a_n &= c_1,\\
&\vdots\\
a_0 + b_n a_1 + b_n^2 a_2 + \ldots + b_n^n a_n &= c_n.
\end{aligned}
$$

právě jedno řešení $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Lagrangeův interpolační polynom není šikovný pouze tím, že existuje. Jeho krása tkví v tom, že ho můžeme explicitně napsat. To je společně s jeho jednoznačností velmi silná zbraň.

Hodnoty v bodech

Začneme jednoduchými úlohami, jejich cílem je spočítat hodnotu polynomu zadaného svými hodnotami v nějakém dalším bodě.

Úloha 2. Reálný polynom f stupně $\deg f \leq n$ splňuje $f(i) = 2^i$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. Spočtěte $f(n+1)$.

Úloha 3. Ukažte, že polynom f z předchozí úlohy má stupeň přesně n.

Úloha 4. Reálný polynom f stupně $\deg f \leq n$ splňuje $f(k) = \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$. Spočtěte $f(n+1)$.

(IMO Shortlist 1981)

Úloha 5. Polynom f s celočíselnými koeficienty splňuje $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Ať p je takové prvočíslo, že $f(k)$ dává zbytek 0 nebo 1 modulo p pro libovolné $k \in N$. Dokažte, že f má stupeň alespoň $p - 1$.

(IMO Shortlist 1997)

Úloha 6. Ať $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou nezáporná celá čísla. Dokaže, že konstatní člen součinu

$$
\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i} \qquad \text{je roven} \qquad \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)!}{\prod_{i=1}^n a_i!}.
$$

Na procvičení ještě dodáme dva další úplně přímočaré příklady, jejichž dopočtení však vyžaduje o trochu víc práce.

Úloha 7. Ať F_i značí i-té Fibonacciho číslo.[1] Ať polynom f stupně 990 splňuje $f(k) = F_k$ pro všechna $k = 992, 993, \ldots, 1982$. Dokažte, že $f(1983) = F_{1983} - 1$.

(IMO Shortlist 1983)

Úloha 8. Polynom $f(x)$ stupně $3n$ má hodnotu 0 v bodech $2, 5, 8, \ldots, 3n-1$, hodnotu 1 v bodech $1, 4, 7, \ldots, 3n-2$ a hodnotu 2 v bodech $0, 3, 6, \ldots, 3n$. Navíc platí $f(3n+1) = 730$. Nalezněte n.

(USAMO 1984)

[1] Tedy $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$.

Kombinatorika a koeficienty

Pro důkazy některých identit často stačí spočítat některý koeficient nějakého polynomu dvěma způsoby.

Úloha 9. Dokažte, že pro libovolná po dvou různá celá čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a pro libovolné přirozené k je

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}$$

celé číslo.

(Velká Británie)

Úloha 10. Jakých hodnot nabývá výraz z minulého příkladu pro přirozená $k = 0, 1, \ldots, n-1$?

Úloha 11. Vyjádřete předešlý výraz jako polynom v proměnných a_i pro $k = n$ a pro $k = n + 1$

Úloha 12. Vyjádřete předešlý výraz jako polynom v proměnných a_i pro libovolné $k \geq n$.

Úloha 13. Ať $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ je reálný polynom. Pro libovolná reálná b, h dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(b + kh) = a_n n! h^n.$$

Poznamenejme, že v předchozí úloze může být klidně $a_n = 0$, používáme totiž pouze horní odhad na stupeň f. Nyní přijde sprška kombinatorických identit. Některé jsou důsledky elementárních kombinatorických principů, jiné zcela lehké nejsou. Každopádně si je však rozmyslete pomocí předchozí úlohy či jiné interpolace.

Úloha 14. Pro $p = 0, 1, \ldots n - 1$ dokažte

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0.$$

Úloha 15. Dokažte, že

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!.$$

Úloha 16. Ukažte rovnost

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Pro radost si můžete stejnýmzpůsobem spočítat podobné sumy i pro vyšší mocniny. Na závěr této sekce si zadáme jednu těžkou úlohu.

Úloha 17. Dokažte rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} (n-k)^n = n^n \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Polynomy a nerovnosti

Doteď jsme interpolaci používali k získávání rovností. Nyní se ji pokusíme aplikovat k důkazům různých nerovností s polynomy. Máme-li totiž nějakou podmínku na dostatek hodnot polynomu, Lagrangeova interpolace pak vynucuje nerovnosti v dalších bodech.

Úloha 18. Reálný polynom $f(x)$ stupně n splňuje na intervalu $[0,1]$ nerovnost $|f(x)| \leq 1$. Dokažte, že $|f(\frac{-1}{n})| \leq 2^{n+1} - 1$.

Úloha 19. Mějme reálný polynom $f = ax^2 + bx + c$, takový, že čísla $f(-1)$, $f(0)$ a $f(1)$ v absolutní hodnotě nepřesahují 1. Dokažte, že pro libovolné $x \in [-1,1]$ platí $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ a $|x^2 f(\frac{1}{x})| \leq 2$.

(Španělsko 1996)

Úloha 20. Je dáno reálné $a \geq 3$ a polynom p stupně n. Dokažte, že

$$\max_{i=0,1,\ldots,n+1} |a^i - p(i)| \geq 1.$$

(Indie 1998)

Úloha 21. Patrik si napsal reálný monický polynom stupně n, vyhodnotil jej v $n+1$ různých celočíselných bodech, vzal z nich absolutní hodnoty a vybral tu největší. Polynom i body volil tak, aby výsledná hodnota byla nejnižší možná. Kolik mu vyšlo?

(iKS-5-A3)

Nyní si ještě zadáme několik dalších příkladů, které s interpolací úzce souvisí. V nich se typicky hodí tipnout správné body, ve kterých interpolaci provedeme. Pro polynomy nízkých stupňů je takové tipování možné, pro vyšší stupně se k němu hodí znalost takzvaných Čebyševových polynomů. Jejich zkoumání se ale vyhneme.

Úloha 22. Nalezněte maximum výrazu $a^2 + b^2 + c^2$, je-li $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ pro libovolné $x \in [-1,1]$.

Úloha 23. Reálná čísla a, b, c, d splňují $|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leq 1$ pro všechna $x \in [-1,1]$. Ukažte, že $|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7$.

(IMO Shortlist 1996)

Úloha 24. Budiž $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ reálný polynom splňující $|p(x)| \leq 1$ na intervalu $[-1,1]$. Maximalizujte $|c|$ a určete, pro které polynomy se maxima nabývá.

Úloha 25. Mějme funkci $F = \max_{x\in[0,3]}|x^3 - ax^2 - bx - c|$. Nalezněte její minimum přes všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(Čína TST 2001)

Na závěr poznamenejme, že silnou zbraní na mnoho takových polynomiálních nerovností je Čebyševova věta, která říká, že monický reálný polynom f stupně n na intervalu $[-1, 1]$ splňuje $\max_{x\in[-1,1]}|f(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Tento odhad přitom obecně vylepšit nelze. Všimněte si, že například poslední z našich úloh je pak triviální. My se však touto větou důkladněji zabývat nebudeme.

Další stylovou aplikací Lagrangeovy interpoleční formule je její vypuštění na komplexní polynomy

Literatura a zdroje

Bohužel, kvalitních zdrojů příkladů na interpolaci moc není. Příspěvek proto vychází z následujících dvou knih.

[1] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Problems from the Book*

[2] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, *Straight from the Book*

Hinty

Hint 1. Interpretujte a_i jako koeficienty Lagrangeova polynomu.
Hint 2. Napište jej, s využitím vlastností kombinačních čísel vyjde $2^{n+1} - 1$.
Hint 3. Kdyby měl menší stupeň, musel by příslušnými body přesně procházet už ten předchozí polynom.
Hint 4. Postupujte jako minule, vyjde zbytek $n + 1$ po dělení dvěma.
Hint 5. Napište plný interpolační polynom v $\mathbb{Z}_p$ a ukažte, že má nenulový vedoucí koeficient.
Hint 6. Nejprve si všimněte, že onen zlomek v proměnných a_i je součtem podobných zlomků, kde je vždy jedno a_i zmenšeno o 1. Dokažte, že konstantní člen takových součinů splňuje tento rekurzivní vztah, pomůže interpolační rovnost $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (1 - \frac{x_i}{x_j})^{-1} = 1$.
Hint 7. Pomozte si třeba známým explicitním vyjádřením Fibonacciho čísel pomocí mocnění zlatého řezu.
Hint 8. Interpolace nám dává jednu podmínku. Nějak domlaťte, že funguje pouze $n = 4$.
Hint 9. Interpolujte polynom x^k. Je-li k moc velké, berte zbytek po dělení $\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$.
Hint 10. Příslušný koeficient polynomu x^k je zřejmý: 0 pro $k \leq n - 2$ a 1 pro $k = n$.
Hint 11. Vyjde $\sum_{i=1}^{n} x_i$ a $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j$.
Hint 12. Zase stejně.
Hint 13. Interpolujte f a sledujte vedoucí koeficient. Případ $h = 0$ řešte zvlášť.
Hint 14. Triviálně z předchozího.
Hint 15. Taktéž.
Hint 16. Vymodulte polynom x^{n+1} vhodným polynomem stupně n a interpolujte.
Hint 18. Přímočaře interpolujte v bodech tvaru $\frac{k}{n}$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$.
Hint 19. Interpolujte a nahlédněte, že stačí řešit jedinou (extrémní) volbu interpolačních koeficientů.
Hint 20. Interpolujte obecně v prvních $n+1$ bodech. Ať se zvolí povolené hodnoty sebelíp, v $n + 1$ bude p moc malý.
Hint 21. Interpolujte v oněch bodech, vyvoďte důsledky z moničnosti polynomu. Vyjde $\frac{n!}{2^n}$.
Hint 22. Interpolujte v bodech $-1, 0, 1$ a vyjádřete $a^2 + b^2 + c^2$ pomocí interpolačních koeficientů.